حساب دیفرانسیل و انتگرال

با

هندسهٔ تحلیلی

جلد سوم

نوشته

لویی لیت هولد

ترجمه

علی اکبر عالم زاده

لیت‌هولد، لوئیس. Leithold, Louis.
حساب دیفرانسیل و انتگرال با هندسه تحلیلی / نوشته لویی لیت‌هولد؛ ترجمهٔ علی‌اکبر عالم‌زاده. –
تهران: مؤسسهٔ نشر علوم نوین؛ ۱۳۶۸ – ۱۳۸۱. ۳ج : مصور، جدول، نمودار
۱۰۰۰ ریال: (ج. ۱)؛ بهای هر جلد متفاوت. ISBN - (دوره) 964-6133-03-7 ISBN
ISBN-.۳۲۰۰۰ ریال:(ج.۱) 964-6133-01-0
ISBN-.۳۳۰۰۰ ریال:(ج.۲) 964-6133-07-x
ISBN-.۳۵۰۰۰ ریال:(ج.۳) 964-6133-08-8
فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
عنوان اصلی: PThe Calculus with analytic geometry.
این کتاب در سال‌های مختلف توسط ناشرین مختلف منتشر شده است.
واژه‌نامه. ج.۱ (چاپ بیست و سوم: ۱۳۸۱).
ج.۲ (چاپ چهاردهم: ۱۳۸۱)
ج.۳ (چاپ چهاردهم: ۱۳۸۱)
۱. حساب دیفرانسیل. ۲. حساب انتگرال. ۳. هندسه تحلیلی. الف. عالم‌زاده، علی‌اکبر، ۱۳۲۲ – مترجم. مترجم. ب. عنوان.
۵۱۵/۱۵ QA۳۰۳ / ل۹ح۵
کتابخانه ملی ایران ۱۳۶۸ ۲۶۷۸ – ۶۸م**

مرکز نشر و پخش و فروش: تهران – میدان انقلاب – خیابان شهدای ژاندارمری
پلاک ۲۲۵ تلفن: ۶۴۹۹۳۳۰ / فاکس: ۶۴۰۱۳۵۶

شناسنامهٔ کتاب
نام کتاب: حساب دیفرانسیل و انتگرال با هندسهٔ تحلیلی (جلد سوم)
مؤلف: لوئی لیت‌هولد
مترجم: دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده
ناشر: مؤسسهٔ نشر علوم‌نوین
(مرکز چاپ و نشر کتابهای علمی دانشگاهی)
شمارگان: ۳۳۰۰ جلد
نوبت چاپ: چاپ چهاردهم، تابستان ۱۳۸۱
چاپ: حدیث
صحافی: آزاده

شابک: ۸ - ۰۸ - ۶۱۳۳ - ۹۶۴ (جلد ۳)
شابک: ۷ - ۰۳ - ۶۱۳۳ - ۹۶۴ (دوره ۳ جلدی)
قیمت: ۳۵۰۰ تومان

از صفحه ۱۱۹۷ تا ۱۵۵۰ اسکن شود
صفحه ۲

فهرست مطالب

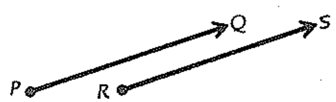
جلد سه

۱۶
بردارها در صفحه و معادلات پارامتری

۱.۱۶ بردارها در صفحه

در کاربردهای ریاضیات در فیزیک و مهندسی، اغلب به کمیاتی توجه می‌شود که هم دارای *اندازه*اند و هم دارای جهت؛ مثالهایی از این کمیات عبارتند از **نیرو**، **سرعت**، **شتاب**، و **تغییر مکان**. این کمیات را می‌توان بـه‌طور هندسی با یک ***پاره خط جهتدار*** نمایش داد. فیزیکدانان و مهندسان یک پاره خط جهتدار را ***بردار*** می‌گویند، و کمیاتی که هم اندازه و هم جهت دارند را ***کمیات برداری*** می‌نامند. بررسی بردارها ***آنالیز برداری*** نام یافته‌است.

روش‌پرداختن به‌آنالیز برداری می‌تواند هندسی یا تحلیلی باشد. در روش هندسی، ابتدا یک پاره‌خط‌جهتدار را پاره‌خطی از نقطهٔ P تا نقطهٔ Q تعریف‌کرده و این پاره‌خط جهتدار را با $\overrightarrow{PQ}$ نشان می‌دهیم. نقطهٔ P را **نقطهٔ شروع**، و نقطهٔ Q را **نقطهٔ پایان** می‌نامیم. در این‌صورت، دو پاره‌خط‌جهتدار $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{RS}$ را مساوی گوییم اگر **یک طول و یک جهت** داشته باشند، و مـی‌نویسیم $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ (ر.ک. شکل ۱.۱.۱۶). پاره‌خط



$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$
شکل ۱.۱.۱۶

جهتدار PQ را ***بردار*** از P تا Q می‌نامند. یک بـردار با یک حرف، که در چاپ از نوع حروف سیاه‌است، مثل $\mathbf{A}$ نموده می‌شود. در برخی از کتابها، برای نمایش بردار از حروف نازک، با سهم در بالای آنها، مثلاً $\vec{A}$، استفاده می‌شود.

در ادامهٔ روش‌هندسی در آنالیز برداری، توجه کنید که اگر پاره خط جهتدار $\overrightarrow{PQ}$ بردار $\mathbf{A}$ بوده، و $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$، پاره‌خط‌جهتدار $\overrightarrow{RS}$ نیزبردار $\mathbf{A}$ است. دراین‌صورت، اگر برداری موازی خود حرکت کند، آن را بدون تغییر می‌گیریم. با این تعبیر از بردار،

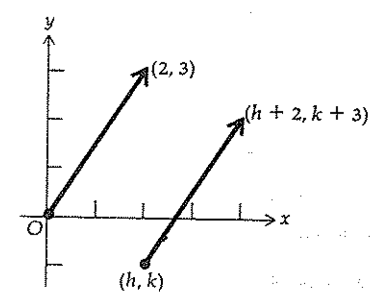
می‌توان برای سهولت فرض کرد نقطهٔ شروع هر بردار در نقطهٔ ثابتی قرار دارد. اگر این نقطه‌را مبداء دستگاه مختصات دکارتی بگیریم، یک بردار را می‌توان به‌طور تحلیلی برحسب اعداد حقیقی تعریف نمود. این تعریف اجازهٔ بررسی آنالیز برداری را صرفاً " از دیدگاهی ریاضی به‌ما خواهد داد.

در این کتاب روش تحلیلی بکار می‌بریم؛ لکن، از تعبیر هندسی برای توضیح استفاده خواهد شد. یک بردار با جفت مرتبی از اعداد حقیقی نموده می‌شود، و به‌جای $\langle x, y\rangle$ از نماد (x, y) استفاده می‌کنیم تا نماد بردار با نماد نقطه خلط نشود. V_2 مجموعهٔ تمام چنین جفتهای مرتب است. تعریف صوری در زیر آمده است.

۱۰۱۰۱۶ تعریف. یک **بردار در صفحه** جفت مرتبی از اعداد حقیقی $\langle x, y\rangle$ است. اعداد x و y **مولفه‌های** بردار $\langle x, y\rangle$ نام دارند.

بین بردارهای $\langle x, y\rangle$ در صفحه و نقاط (x, y) در صفحه تناظر یک به‌یکی وجود دارد. فرض‌کنیم بردار $\mathbf{A}$ جفت مرتب $\langle a_1, a_2\rangle$ از اعداد حقیقی باشد. هرگاه A نقطهٔ (a_1, a_2) باشد، آنگاه بردار $\mathbf{A}$ را می‌توان با پاره‌خط جهتدار $\overrightarrow{OA}$ به‌طور هندسی نمایش داد. چنین پاره‌خط جهتدار را یک **نمایش** بردار $\mathbf{A}$ می‌نامیم. هر پاره‌خط جهتدار مساوی با $\overrightarrow{OA}$ نیز یک نمایش بردار $\mathbf{A}$ است. نمایش خاص برداری که نقطهٔ شروعش مبداء است **نمایش موضعی** بردار نام دارد.

توضیح ۱. بردار $\langle 2, 3\rangle$ دارای نمایش موضعی پاره‌خط جهتدار از مبداء تا نقطهٔ $(2, 3)$ است. نمایش بردار $\langle 2, 3\rangle$ که نقطهٔ شروعش (h, k) است دارای نقطهٔ پایان $(h + 2, k + 3)$ می‌باشد؛ به شکل ۲۰۱۰۱۶ رجوع کنید.



شکل ۲۰۱۰۱۶

بردار $\langle 0, 0\rangle$ **بردار صفر** نام دارد، و با $\mathbf{0}$ نموده می‌شود؛ یعنی،

$$\mathbf{0} = \langle 0, 0\rangle$$

هر نقطه یک نمایش بردار صفر است.

۲۰۱۰۱۶ تعریف. ***اندازهٔ*** یک بردار طول یکی از نمایشهای آن است، و **جهت** یک‌بردار ناصفر جهت یکی از نمایشهای آن می‌باشد.

اندازهٔ بردار $\mathbf{A}$ با $|\mathbf{A}|$ نموده می‌شود.

۳۰۱۰۱۶ قضیه. ***هرگاه $\mathbf{A}$ بردار $\langle a_1, a_2\rangle$ باشد، آنگاه*** $|\mathbf{A}| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2}$.

برهان. چون طبق تعریف ۲۰۱۰۱۶ $|\mathbf{A}|$ طول یکی از نمایشهای $\mathbf{A}$ است، $|\mathbf{A}|$ طول نمایش موضعی $\mathbf{A}$ است، که فاصله از مبداء تا نقطهٔ (a_1, a_2) است. لذا، از فرمول فاصلهٔ بین دو نقطه داریم

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{(a_1 - 0)^2 + (a_2 - 0)^2} = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2}$$

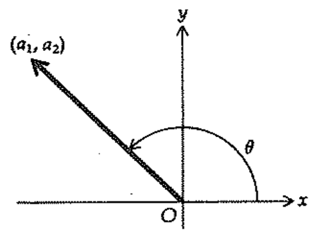
توجه کنید که $|\mathbf{A}|$ عددی نامنفی است و بردار نیست. از قضیهٔ ۳۰۱۰۱۶ نتیجه می‌شود که $|\mathbf{0}| = 0$.

توضیح ۲. هرگاه $\mathbf{A} = \langle -3, 5\rangle$، آنگاه

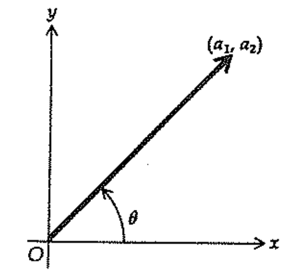
$$|\mathbf{A}| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{34}$$

جهت یک بردار ناصفر عبارت است از زاویهٔ θ از محور مثبت x به نمایش موضعی بردار در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت به رادیان: $0 \le \theta < 2\pi$. درنتیجه، هرگاه $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2\rangle$، آنگاه $\tan\theta = a_2/a_1$ اگر $a_1 \neq 0$. هرگاه $a_1 = 0$ و $a_2 > 0$، آنگاه $\theta = \frac{1}{2}\pi$. هرگاه $a_1 = 0$ و $a_2 < 0$، آنگاه $\theta = \frac{3}{2}\pi$. شکلهای ۳۰۱۰۱۶، ۴۰۱۰۱۶، و ۵۰۱۰۱۶ زاویهٔ θ را برای بردارهای خاص $\langle a_1, a_2\rangle$ که نمایشهای موضعی آنها رسم شده‌اند نشان می‌دهند.

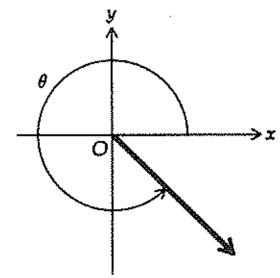
مثال ۱. زاویه‌ای که جهت هریک از بردارهای زیر را بدست می‌دهد را به رادیان بیابید:



شکل ۴۰۱۰۱۶



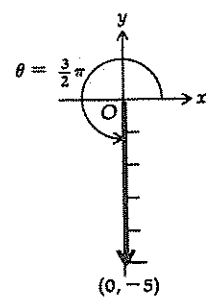
شکل ۳۰۱۰۱۶



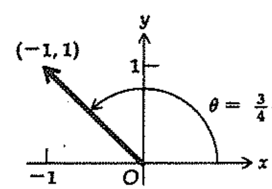
شکل ۵۰۱۰۱۶

(آ) $\langle -1, 1\rangle$ ؛ (ب) $\langle 0, -5\rangle$ ؛ (پ) $\langle -1, 2\rangle$.

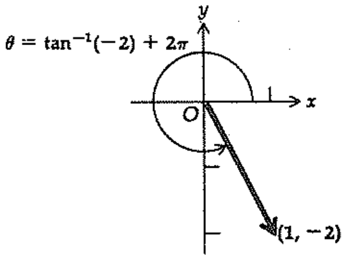
حل. نمایش موضعی هریک از بردارها در (آ)، (ب)، و (پ) بترتیب در شکلهای ۶۰۱۰۱۶، ۷۰۱۰۱۶، و ۸۰۱۰۱۶ نموده شده است. (آ) $\tan\theta = -1$ ؛ درنتیجه،



شکل ۷۰۱۰۱۶



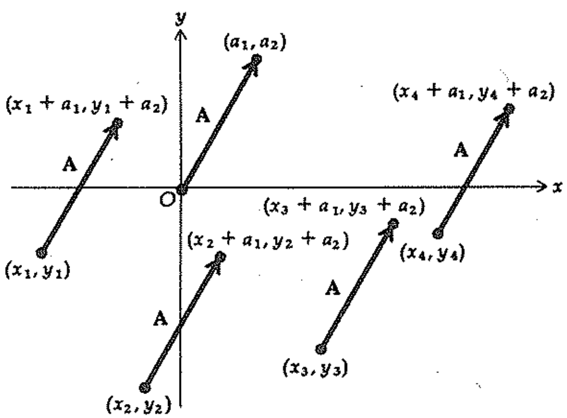
شکل ۶۰۱۰۱۶



شکل ۸۰۱۰۱۶

$\theta = \frac{3}{4}\pi$ ؛ (ب) $\tan\theta$ وجود ندارد و $a_2 < 0$ ؛ $\theta = \frac{3}{2}\pi$ ؛ (پ) $\tan\theta = -2$ ؛ $\theta = \tan^{-1}(-2) + 2\pi$.

هرگاه $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2\rangle$ ، نمایش $\mathbf{A}$ که‌نقطهٔ شروعش (x, y) است‌دارای‌نقطهٔ‌انتهایی $(x + a_1, y + a_2)$ است. بدین ترتیب، یک بردار را می‌توان یک انتقال از صفحه بتوی خود تصور کرد. شکل ۹۰۱۰۱۶ پنج نمایش بردار $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2\rangle$ رانشان می‌دهد. در هر حالت، $\mathbf{A}$ نقطهٔ (x_i, y_i) را به‌نقطهٔ $(x_i + a_1, y_i + a_2)$ انتقال می‌دهد.



شکل ۹۰۱۰۱۶

تعریف زیر روش جمع دو بردار را بدست می‌دهد.

۴۰۱۰۱۶ تعریف. مجموع دوبردار $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2\rangle$ و $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2\rangle$ بردار $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ است

که با

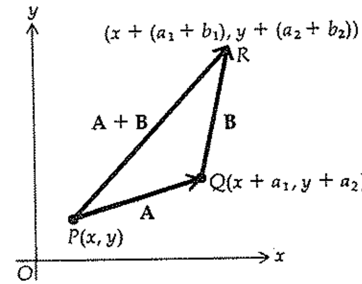
$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\langle a_1+b_1, a_2+b_2\rangle$$

تعریف می‌شود.

توضیح ۳. هرگاه $\mathbf{A}=\langle 3,-1\rangle$ و $\mathbf{B}=\langle -4,5\rangle$، آنگاه

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\langle 3+(-4), -1+5\rangle=\langle -1,4\rangle$$

تعبیر هندسی مجموع دو بردار در شکل ۱۰.۱.۱۶ نموده شده است. فرض کنیم

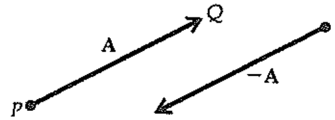


شکل ۱۰.۱.۱۶

$\mathbf{A}=\langle a_1,a_2\rangle$ و $\mathbf{B}=\langle b_1,b_2\rangle$، و P نقطهٔ (x,y) باشد. $\mathbf{A}$ نقطهٔ P را به نقطهٔ $Q=(x+a_1,y+a_2)$ می‌برد. بردار $\mathbf{B}$ نقطهٔ Q را به نقطهٔ $((x+a_1)+b_1,(y+a_2)+b_2)$ یا، معادلاً، $R=(x+(a_1+b_1),y+(a_2+b_2))$ انتقال می‌دهد. بعلاوه، $\mathbf{A}+\mathbf{b}=\langle a_1+b_1,a_2+b_2\rangle$. پس بردار $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ نقطهٔ P را به نقطهٔ $R=(x+(a_1+b_1),y+(a_2+b_2))$ می‌برد. مثلاً، در شکل ۱۰.۱.۱۶، $\overrightarrow{PQ}$ یک نمایش بردار $\mathbf{A}$، $\overrightarrow{QR}$ یک نمایش بردار $\mathbf{B}$، و $\overrightarrow{PR}$ یک نمایش بردار $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ است. نمایشهای بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ اضلاع مجاور یک متوازی‌الاضلاع‌اند، و نمایش بردار $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ یک قطر آن متوازی الاضلاع می‌باشد. لذا، قاعدهٔ جمع بردارها را گاهی ***قانون متوازی‌الاضلاع*** می‌نامند.

۵.۱.۱۶ تعریف. هرگاه $\mathbf{A}=\langle a_1,a_2\rangle$، آنگاه بردار $\langle -a_1,-a_2\rangle$ **قرینهٔ** $\mathbf{A}$ تعریف و با $-\mathbf{A}$ نموده می‌شود.

هرگاه پاره‌خط جهتدار $\overrightarrow{PQ}$ یک نمایش بردار $\mathbf{A}$ باشد، پاره خط جهتدار $\overrightarrow{QP}$ یک نمایش $-\mathbf{A}$ می‌باشد. هر پاره‌خط جهتدار موازی $\overrightarrow{PQ}$ که طولش با $\overrightarrow{PQ}$ یکی بوده وجهتش مخالف $\overrightarrow{PQ}$ باشد نیز یک نمایش $-\mathbf{A}$ است (ر.ک. شکل ۱۱.۱.۱۶). حال تفریق دو بردار را تعریف می‌کنیم.



شکل ۱۱.۱.۱۶

۶.۱.۱۶ تعریف. ***تفاضل*** دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$، که با $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ نموده می‌شود، برداری است که از جمع $\mathbf{A}$ با قرینهٔ $\mathbf{B}$ بدست می‌آید؛ یعنی،

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-\mathbf{B})$$

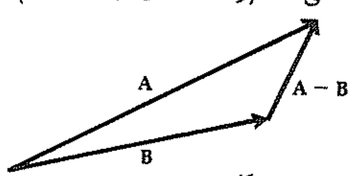
درنتیجه، هرگاه $\mathbf{A}=\langle a_1,a_2\rangle$ و $\mathbf{B}=\langle b_1,b_2\rangle$، آنگاه $-\mathbf{B}=\langle -b_1,-b_2\rangle$؛ و درنتیجه،

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\langle a_1-b_1,a_2-b_2\rangle$$

توضیح ۴. هرگاه $\mathbf{A}=\langle 4,-2\rangle$ و $\mathbf{B}=\langle 6,-3\rangle$، آنگاه

$$\begin{aligned}\mathbf{A}-\mathbf{B}&=\langle 4,-2\rangle-\langle 6,-3\rangle\\&=\langle 4,-2\rangle+\langle -6,3\rangle\\&=\langle -2,1\rangle\end{aligned}$$

برای تعبیر هندسی تفاضل دو بردار، فرض کنیم نمایشهای دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ یک نقطهٔ شروع داشته باشند. دراین صورت، پاره خط‌جهتدار از نقطهٔ انتهایی نمایش $\mathbf{B}$ تا نقطهٔ انتهایی نمایش $\mathbf{A}$ یک نمایش بردار $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ است. این از قانون متوازی‌الاضلاع $\mathbf{B}+(\mathbf{A}-\mathbf{B})=\mathbf{A}$ تبعیت می‌کند (ر.ک. شکل ۱۲.۱.۱۶).



شکل ۱۲.۱.۱۶

عمل دیگر در بردارها ضرب *اسکالر* است. هر *اسکالر* یک عدد حقیقی است. ذیلاً تعریف ضرب یک بردار در یک اسکالر آمده است.

۷۰۱۰۱۶ تعریف. هرگاه c یک اسکالر و **A** بردار $\langle a_1, a_2\rangle$ باشد، آنگاه ***حاصل ضرب*** c در **A**، که با $c\mathbf{A}$ نموده می‌شود، برداری است که با

$$c\mathbf{A} = c\langle a_1, a_2\rangle = \langle ca_1, ca_2\rangle$$

تعریف می‌گردد.

توضیح ۵. هرگاه $\mathbf{A} = \langle 4, -5\rangle$، آنگاه

$$3\mathbf{A} = 3\langle 4, -5\rangle = \langle 12, -15\rangle$$

مثال ۲. هرگاه **A** یک بردار و c یک اسکالر باشد، نشان دهید که $0(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ و $c(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

حل. از تعریف ۷۰۱۰۱۶ داریم

$$0(\mathbf{A}) = 0\langle a_1, a_2\rangle = \langle 0, 0\rangle = \mathbf{0}$$

و

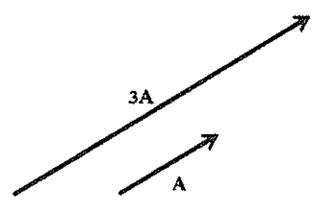
$$c(\mathbf{0}) = c\langle 0, 0\rangle = \langle 0, 0\rangle = \mathbf{0}$$

اندازهٔ بردار $c\mathbf{A}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود.

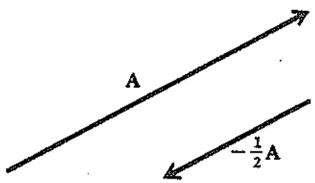
$$\begin{aligned} c\mathbf{A} &= \sqrt{(ca_1)^2 + (ca_2)^2} \\ &= \sqrt{c^2(a_1{}^2 + a_2{}^2)} \\ &= \sqrt{c^2}\,\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2} \\ &= |c||\mathbf{A}| \end{aligned}$$

لذا، اندازهٔ $c\mathbf{A}$ قدر مطلق c ضربدر اندازهٔ **A** است.

تعبیر هندسی بردار $c\mathbf{A}$ در شکلهای ۱۳۰۱۰۱۶ و ۱۴۰۱۰۱۶ داده شده است.



شکل ۱۳۰۱۰۱۶



شکل ۱۴۰۱۰۱۶

هرگاه $c > 0$، آنگاه $c\mathbf{A}$ برداری است که طول نمایشش c برابر اندازهٔ **A** است و با **A** همجهت است؛ مثالی از این در شکل ۱۳۰۱۰۱۶ نموده شده است، که در آن $c = 3$. هرگاه $c < 0$، آنگاه $c\mathbf{A}$ برداری است که طول نمایشش $|c|$ برابر اندازهٔ **A** بوده و با **A** مختلف‌الجهت می‌باشد. این در شکل ۱۴۰۱۰۱۶ نموده شده است، که در آن $c = -\frac{1}{2}$.

تمرینات ۱۰۱۶

در تمرینهای ۱ تا ۶، نمایش موضعی بردار **A** و نیز نمایش خاص ماربر نقطهٔ P را رسم کنید، و اندازهٔ **A** را پیدا نمایید.

۱. $\mathbf{A} = \langle 3, 4\rangle; P = (2, 1)$
۲. $\mathbf{A} = \langle -2, 5\rangle; P = (3, -4)$
۳. $\mathbf{A} = \langle 0, -2\rangle; P = (-3, 4)$
۴. $\mathbf{A} = \langle 4, 0\rangle; P = (2, 6)$
۵. $\mathbf{A} = \langle 3, \sqrt{2}\rangle; P = (4, -\sqrt{2})$
۶. $\mathbf{A} = \langle e, -\frac{1}{2}\rangle; P = (-2, -e)$

در تمرینهای ۷ تا ۱۲، بردار **A** به نمایش $\overrightarrow{PQ}$ را بیابید. $\overrightarrow{PQ}$ و نمایش موضعی **A** را بکشید.

۷. $P = (3, 7); Q = (5, 4)$
۸. $P = (5, 4); Q = (3, 7)$
۹. $P = (-3, 5); Q = (-5, -2)$
۱۰. $P = (0, \sqrt{3}); Q = (2, 3\sqrt{3})$
۱۱. $P = (-5, -3); Q = (0, 3)$
۱۲. $P = (-\sqrt{2}, 0); Q = (0, 0)$

در تمرینهای ۱۳ تا ۱۶، نقطهٔ S را طوری بیابید که $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{RS}$ نمایشهای یک بردار باشند.

۱۳. $P = (2, 5); Q = (1, 6); R = (-3, 2)$
۱۴. $P = (-1, 4); Q = (2, -3); R = (-5, -2)$
۱۵. $P = (0, 3); Q = (5, -2); R = (7, 0)$
۱۶. $P = (-2, 0); Q = (-3, -4); R = (4, 2)$

در تمرینهای ۱۷ تا ۲۲، مجموع دو بردار را یافته و آن را تعبیر هندسی کنید.

۱۷. $\langle 2, 4\rangle; \langle -3, 5\rangle$
۱۸. $\langle 0, 3\rangle; \langle -2, 3\rangle$

۱۹. $\langle -3, 0\rangle; \langle 4, -5\rangle$ ۲۰. $\langle 2, 3\rangle; \langle -\sqrt{2}, -1\rangle$

۲۱. $\langle 0, 0\rangle; \langle -2, 2\rangle$ ۲۲. $\langle 2, 5\rangle; \langle 2, 5\rangle$

در تمرینهای ۲۳ تا ۲۸، بردار دوم را از بردار اول کم کرده و آن را تعبیر هندسی کنید.

۲۳. $\langle 4, 5\rangle; \langle -3, 2\rangle$ ۲۴. $\langle 0, 5\rangle; \langle 2, 8\rangle$

۲۵. $\langle -3, -4\rangle; \langle 6, 0\rangle$ ۲۶. $\langle 1, e\rangle; \langle -3, 2e\rangle$

۲۷. $\langle 0, \sqrt{3}\rangle; \langle -\sqrt{2}, 0\rangle$ ۲۸. $\langle 3, 7\rangle; \langle 3, 7\rangle$

۲۹. فرض کنید $\mathbf{A} = \langle 2, -5\rangle$، $\mathbf{B} = \langle 3, 1\rangle$، و $\mathbf{C} = \langle -4, 2\rangle$.

(آ) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ را یافته و آن را تعبیر هندسی کنید.

(ب) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ را یافته و آن را تعبیر هندسی کنید.

در تمرینهای ۳۰ تا ۳۵، فرض کنید $\mathbf{A} = \langle 2, 4\rangle$، $\mathbf{B} = \langle 4, -3\rangle$ و $\mathbf{C} = \langle -3, 2\rangle$.

۳۰. $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ را بیابید. ۳۱. $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ را بیابید.

۳۲. $|\mathbf{C}|$ را بیابید. ۳۳. $|\mathbf{C} - \mathbf{B}|$ را بیابید.

۳۴. $2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$ را بیابید. ۳۵. $|7\mathbf{A} - \mathbf{B}|$ را بیابید.

۳۶. به فرض آنکه $\mathbf{A} = \langle 3, 2\rangle$، $\mathbf{C} = \langle 8, 8\rangle$، و $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$، $|\mathbf{B}|$ را بیابید.

۳۷. به فرض آنکه $\mathbf{A} = \langle 6, -9\rangle$، $\mathbf{C} = \langle 10, -8\rangle$، و $2\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{C}$،   را بیابید.

۳۸. به فرض آنکه $\mathbf{A} = \langle -3, 2\rangle$، $\mathbf{B} = \langle 4, -1\rangle$، و $\mathbf{C} = \langle 8, 3\rangle$، اسکالرهای h و k را طوری بیابید که $h\mathbf{A} + k\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

۳۹. به فرض آنکه $\mathbf{A} = \langle 5, -2\rangle$، $\mathbf{B} = \langle -4, 3\rangle$، و $\mathbf{C} = \langle -6, 8\rangle$، اسکالرهای h و k را طوری بیابید که $\mathbf{B} = h\mathbf{C} - k\mathbf{A}$.

۴۰. نامساوی مثلثی $|\mathbf{A} + \mathbf{B}| \le |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$ برای بردارها را به‌طور تحلیلی ثابت کنید.

۴۱. فرض کنید $\overrightarrow{PQ}$ نمایش بردار $\mathbf{A}$، $\overrightarrow{QR}$ نمایش بردار $\mathbf{B}$، و $\overrightarrow{RS}$ نمایش بردار $\mathbf{C}$ باشد. ثابت کنید هرگاه $\overrightarrow{PQ}$، $\overrightarrow{QR}$، و $\overrightarrow{RS}$ اضلاع یک مثلث باشند، آنگاه $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{0}$.

۲.۱۶ خواص جمع برداری و ضرب اسکالر

در قضیهٔ زیر قوانین برقرار به‌وسیلهٔ اعمال جمع برداری و ضرب اسکالر بردارها در V_2 ذکر شده‌اند.

۱.۲.۱۶ قضیه. *هرگاه $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$، و $\mathbf{C}$ بردارهایی در V_2 بوده، و c و d اسکالرهایی*

باشند، آنگاه جمع برداری و ضرب اسکالر از خواص زیر برخوردارند:

(یک) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ *(قانون جمعپذیری)*

(دو) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ *(قانون شرکتپذیری)*

(سه) *برداری مانند* $\mathbf{0}$ *در* V_2 *هست بطوری که*

$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$ *(وجود همانی جمعی)*

(چهار) *برداری مانند* $-\mathbf{A}$ *در* V_2 *هست بطوری که*

$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ *(وجود قرینه)*

(پنج) $(cd)\mathbf{A} = c(d\mathbf{A})$ *(قانون شرکتپذیری)*

(شش) $c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = c\mathbf{A} + c\mathbf{B}$ *(قانون پخشپذیری)*

(هفت) $(c + d)\mathbf{A} = c\mathbf{A} + d\mathbf{A}$ *(قانون پخشپذیری)*

(هشت) $1(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$ *(وجود همانی ضرب اسکالر)*

برهان. (یک)، (چهار)، و (شش) را ثابت می‌کنیم و بقیه را به‌عنوان تمرین می‌گذاریم (ر.ک. تمرینهای ۳۲ تا ۳۵). فرض کنیم $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2\rangle$ و $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2\rangle$.

برهان (یک). طبق قانون تعویضپذیری اعداد حقیقی، $a_1 + b_1 = b_1 + a_1$ و $a_2 + b_2 = b_2 + a_2$. لذا،

$$\begin{aligned}\mathbf{A} + \mathbf{B} &= \langle a_1, a_2\rangle + \langle b_1, b_2\rangle\\ &= \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle\\ &= \langle b_1 + a_1, b_2 + a_2\rangle\\ &= \langle b_1, b_2\rangle + \langle a_1, a_2\rangle\\ &= \mathbf{B} + \mathbf{A}\end{aligned}$$

برهان (چهار). بردار $-\mathbf{A}$ با تعریف ۵.۱.۱۶ داده شده است و

$$\begin{aligned}\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) &= \langle a_1, a_2\rangle + \langle -a_1, -a_2\rangle\\ &= \langle a_1 + (-a_1), a_2 + (-a_2)\rangle\\ &= \langle 0, 0\rangle\\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

برهان (شش)

$$\begin{aligned} c(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= c(\langle a_1, a_2\rangle + \langle b_1, b_2\rangle) \\ &= c(\langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle) \\ &= \langle c(a_1+b_1), c(a_2+b_2)\rangle \\ &= \langle ca_1 + cb_1, ca_2 + cb_2\rangle \\ &= \langle ca_1, ca_2\rangle + \langle cb_1, cb_2\rangle \\ &= c\langle a_1, a_2\rangle + c\langle b_1, b_2\rangle \\ &= c\mathbf{A} + c\mathbf{B} \end{aligned}$$

مثال ۱. هرگاه $\mathbf{A} = \langle 3, 4\rangle$ ، $\mathbf{B} = \langle -2, 1\rangle$ ، $\mathbf{C} = \langle 5, -3\rangle$ ، $c = 2$ ، و $d = -6$ ، قسمتهای (دو) ، (سه) ، (پنج) ، (هفت) ، و (هشت) قضیهٔ ۱.۲.۱۷ را تحقیق کنید .

حل

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \langle 3, 4\rangle + (\langle -2, 1\rangle + \langle 5, -3\rangle) \\ &= \langle 3, 4\rangle + \langle 3, -2\rangle \\ &= \langle 6, 2\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} &= (\langle 3, 4\rangle + \langle -2, 1\rangle) + \langle 5, -3\rangle \\ &= \langle 1, 5\rangle + \langle 5, -3\rangle \\ &= \langle 6, 2\rangle \end{aligned}$$

پس $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ ؛ و درنتیجه ، (دو) برقرار است .

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \langle 3, 4\rangle + \langle 0, 0\rangle = \langle 3, 4\rangle = \mathbf{A}$$

لذا ، (سه) برقرار است .

$$\begin{aligned} (cd)\mathbf{A} &= [(2)(-6)]\langle 3, 4\rangle \\ &= (-12)\langle 3, 4\rangle \\ &= \langle -36, -48\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c(d\mathbf{A}) &= 2(-6\langle 3, 4\rangle) \\ &= 2\langle -18, -24\rangle \\ &= \langle -36, -48\rangle \end{aligned}$$

پس $(cd)\mathbf{A} = c(d\mathbf{A})$ ؛ و درنتیجه ، (پنج) برقرار است .

$$(c+d)\mathbf{A} = [2 + (-6)]\langle 3, 4\rangle = (-4)\langle 3, 4\rangle = \langle -12, -16\rangle$$

$$c\mathbf{A} + d\mathbf{A} = 2\langle 3, 4\rangle + (-6)\langle 3, 4\rangle = \langle 6, 8\rangle + \langle -18, -24\rangle = \langle -12, -16\rangle$$

بنابراین ، $(c+d)\mathbf{A} = c\mathbf{A} + d\mathbf{A}$ ؛ و درنتیجه ، (هفت) برقرار است .

$$1\mathbf{A} = 1\langle 3, 4\rangle = \langle (1)(3), (1)(4)\rangle = \langle 3, 4\rangle = \mathbf{A}$$

و لذا ، (هشت) برقرار می‌باشد .

قضیهٔ ۱.۲.۱۶ از اینجهت مهم است که هر قانون جبری جمع برداری و ضرب اسکالر بردارها در V_2 را می‌توان از هشت خاصیت مذکور در قضیه بدست آورد . این قوانین شبیه قوانین حسابی اعداد حقیقی‌اند . بعلاوه ، در جبر خطی ، یک **فضای برداری حقیقی** مجموعه‌ای از بردارها همراه با مجموعه‌ای از اعداد حقیقی ***(اسکالرها)*** و دو عمل جمع برداری‌وضرب اسکالر که در هشت خاصیت مذکور در قضیهٔ ۱.۲.۱۶ صدق می‌کنند تعریف می‌شود . ذیلاً تعریف صوری آن را می‌آوریم .

۲.۲.۱۶ تعریف. **فضای برداری حقیقی V** مجموعه‌ای است از عنصرها ، به‌نام ***بردار*** ، همراه با مجموعه‌ای از اعداد حقیقی ، به‌نام ***اسکالر*** ، با دو عمل به‌نامهای ***جمع برداری*** و ***ضرب اسکالر*** بطوری که به‌ازای هر جفت بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ در و هر اسکالر c ، بردارهای $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ و $c\mathbf{A}$ طوری تعریف شده باشند که در خواص (یک) تا (هشت) قضیهٔ ۱.۲.۱۶ صدق کنند .

از تعریف ۲.۲.۱۶ و قضیهٔ ۱.۲.۱۶ نتیجه می‌شود که V_2 یک فضای برداری‌حقیقی است .

حال یک بردار دلخواه در V_2 اختیار کرده و آن را به‌شکل خاص می‌نویسیم .

$$\mathbf{A} = \langle a_1, a_2\rangle = \langle a_1, 0\rangle + \langle 0, a_2\rangle = a_1\langle 1, 0\rangle + a_2\langle 0, 1\rangle$$

چون اندازهٔ هر دو بردار $\langle 1, 0\rangle$ و $\langle 0, 1\rangle$ یک است ، آنها را ***بردارهای یکه*** می‌نامند . برای این دو بردار یکه نمادهای زیر را بکار می‌بریم :

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle \quad \text{و} \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$$

نمایش موضعی هریک از این بردارهای یکه در شکل ۱.۲.۱۶ نموده شده است . چون

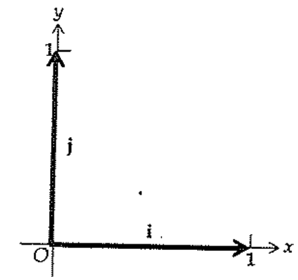
$$\langle a_1, a_2\rangle = a_1\langle 1, 0\rangle + a_2\langle 0, 1\rangle = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$$

هر بردار در V_2 را می‌توان به‌صورت ترکیبی خطی از دو بردار $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ نوشت . به این دلیل ، گوییم بردارهای $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ یک ***پایه*** برای فضای برداری V_2 تشکیل می‌دهند . **تعداد** عناصر یک پایهٔ یک فضای برداری **بعد** فضای برداری نام دارد . لذا ، V_2 یک فضای برداری دوبعدی می‌باشد .

توضیح ۱. بردار $\langle 3, -4\rangle$ را برحسب $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ بیان می‌کنیم.

$$\langle 3, -4\rangle = 3\langle 1,0\rangle + (-4)\langle 0,1\rangle = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$$

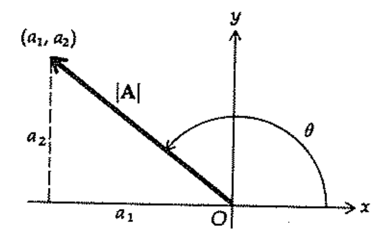
فرض‌کنیم $\mathbf{A}$ بردار $\langle a_1, a_2\rangle$ بوده‌و θ زاویه به رادیان باشد که جهت $\mathbf{A}$ را می‌دهد



شکل ۱۰۲۰۱۶

(ر.ک. شکل ۲۰۲۰۱۶، که در آن (a_1, a_2) در ربع دوم است). $a_1 = |\mathbf{A}|\cos\theta$ و $a_2 = |\mathbf{A}|\sin\theta$. چون $\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$، می‌توان نوشت

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\cos\theta\mathbf{i} + |\mathbf{A}|\sin\theta\mathbf{j}$$



شکل ۲۰۲۰۱۶

یا، معادلاً،

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}|(\cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}) \qquad (۱)$$

معادلهٔ (۱) بردار $\mathbf{A}$ را برحسب اندازه‌اش، کسینوس و سینوس زاویه‌ای که جهت $\mathbf{A}$ را می‌دهد، و بردارهای یکهٔ $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ بیان می‌کند.

مثال ۲. بردار $\langle -5, -2\rangle$ را به‌شکل معادلهٔ (۱) بیان نمایید.

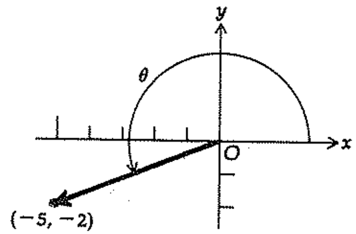
حل. به شکل ۳۰۲۰۱۶ رجوع می‌کنیم، که نمایش موضعی بردار $\langle -5, -2\rangle$ را نشان می‌دهد.

$$|\langle -5, -2\rangle| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$$

$$\cos\theta = -\frac{5}{\sqrt{29}} \quad \text{و} \quad \sin\theta = -\frac{2}{\sqrt{29}}$$

درنتیجه، از (۱) داریم

$$\langle -5, -2\rangle = \sqrt{29}\left(-\frac{5}{\sqrt{29}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{29}}\mathbf{j}\right)$$



شکل ۳۰۲۰۱۶

۳۰۲۰۱۶ قضیه. *هرگاه $\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ بردار ناصفری باشد، بردار یکهٔ $\mathbf{U}$ همجهت $\mathbf{A}$ عبارت است از*

$$\mathbf{U} = \frac{a_1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{i} + \frac{a_2}{|\mathbf{A}|}\mathbf{j} \qquad (۲)$$

برهان. از (۲) داریم

$$\mathbf{U} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) = \frac{1}{|\mathbf{A}|}(\mathbf{A})$$

پس $\mathbf{U}$ مساوی بردار $\mathbf{A}$ ضربدر اسکالر مثبتی است؛ درنتیجه، جهت $\mathbf{U}$ با جهت $\mathbf{A}$ یکی است. بعلاوه،

$$|\mathbf{U}| = \sqrt{\left(\frac{a_1}{|\mathbf{A}|}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{|\mathbf{A}|}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}}{|\mathbf{A}|}$$

$$= \frac{|\mathbf{A}|}{|\mathbf{A}|}$$
$$= 1$$

لذا، $\mathbf{U}$ بردار یکه‌ای است همجهت $\mathbf{A}$، و قضیه ثابت شده است.

مثال ۳. به فرض آنکه $\mathbf{A} = \langle 3, 1\rangle$ و $\mathbf{B} = \langle -2, 4\rangle$، بردار یکهٔ همجهت $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ را بیابید.

حل. $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \langle 3, 1\rangle - \langle -2, 4\rangle = \langle 5, -3\rangle$. بنابراین،

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$$

پس

$$|\mathbf{A} - \mathbf{B}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}$$

بنابر قضیهٔ ۳۰۲۰۱۶، بردار یکهٔ مطلوب عبارت است از

$$\mathbf{U} = \frac{5}{\sqrt{34}}\mathbf{i} - \frac{3}{\sqrt{34}}\mathbf{j}$$

تمرینات ۲۰۱۶

در تمرینهای ۱ تا ۱۶، بردار یا اسکالر داده شده را درصورتی بیابید که $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ و $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$

۱. $5\mathbf{A}$
۲. $-2\mathbf{A}$
۳. $-6\mathbf{B}$
۴. $3\mathbf{B}$
۵. $\mathbf{A} + \mathbf{B}$
۶. $\mathbf{A} - \mathbf{B}$
۷. $|\mathbf{A} + \mathbf{B}|$
۸. $|\mathbf{A} - \mathbf{B}|$
۹. $|\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$
۱۰. $|\mathbf{A}| - |\mathbf{B}|$
۱۱. $5\mathbf{A} - 6\mathbf{B}$
۱۲. $3\mathbf{B} - 2\mathbf{A}$
۱۳. $|5\mathbf{A} - 6\mathbf{B}|$
۱۴. $|3\mathbf{B} - 2\mathbf{A}|$
۱۵. $|5\mathbf{A}| - |6\mathbf{B}|$
۱۶. $|3\mathbf{B}| - |2\mathbf{A}|$

در تمرینهای ۱۷ و ۱۸، $\mathbf{A} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$، $\mathbf{B} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$، و $\mathbf{C} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

۱۷. (آ) $5\mathbf{A} - 2\mathbf{B} - 2\mathbf{C}$ و (ب) $|5\mathbf{A} - 2\mathbf{B} - \mathbf{C}|$ را بیابید.

۱۸. (آ) $3\mathbf{B} - 2\mathbf{A} - \mathbf{C}$ و (ب) $|3\mathbf{B} - 2\mathbf{A} - \mathbf{C}|$ را بیابید.

در تمرینهای ۱۹ و ۲۰، $\mathbf{A} = 8\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ و $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

۱۹. بردار یکهٔ همجهت $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ را بیابید.

۲۰. بردار یکهٔ همجهت $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ را بیابید.

در تمرینهای ۲۱ تا ۲۸، (آ) بردار داده شده را به‌شکل $r(\cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j})$ بنویسید، که درآن r اندازهٔ برداراست و θ زاویه‌ای به رادیان است که جهت بردار را می‌دهد، و (ب) بردار یکهٔ همجهت آن را پیدا کنید.

۲۱. $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$
۲۲. $8\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$
۲۳. $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
۲۴. $3\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$
۲۵. $-4\mathbf{i} + 4\sqrt{3}\mathbf{j}$
۲۶. $2\sqrt{5}\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
۲۷. $-16\mathbf{i}$
۲۸. $2\mathbf{j}$

۲۹. به فرض آنکه $\mathbf{A} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j}$، $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$، و $\mathbf{C} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$، اسکالرهای h و k را طوری بیابید که $\mathbf{C} = h\mathbf{A} + k\mathbf{B}$.

۳۰. به فرض آنکه $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$، $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$، و $\mathbf{C} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$، اسکالرهای h و k را طوری بیابید که $\mathbf{C} = h\mathbf{A} + k\mathbf{B}$.

۳۱. به‌فرض آنکه $\mathbf{A} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$، $\mathbf{B} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$، و $\mathbf{C} = 7\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$، نشان دهید که $\mathbf{C}$ را نمی‌توان به‌شکل $h\mathbf{A} + k\mathbf{B}$ نوشت، که درآن h و k اسکالر باشند.

۳۲. قضیهٔ ۱۰۲۰۱۶ (دو) را ثابت کنید.

۳۳. قضیهٔ ۱۰۲۰۱۶ (پنج) را ثابت کنید.

۳۴. قضیهٔ ۱۰۲۰۱۶ (هفت) را ثابت کنید.

۳۵. قضیهٔ ۱۰۲۰۱۶ (سه) و (هشت) را ثابت کنید.

۳۶. دو بردار را **مستقل** گوییم اگر وفقط اگر نمایشهای موضعی آنها همخط نباشند. بعلاوه، گوییم دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ یک **پایه** برای فضای برداری V_2 تشکیل می‌دهند اگر و فقط اگر هر بردار در V_2 را بتوان به‌صورت ترکیبی‌خطی‌از $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ نوشت. قضیه‌ای‌داریم که می‌گوید دوبردار برای فضای برداری V_2 پایه تشکیل می‌دهند اگر مستقل باشند. با اعمال‌زیرنشان دهید که این قضیه برای دو بردار $\langle 2, 5\rangle$ و $\langle 3, -1\rangle$ برقرار است: (آ) با نشان دادن اینکه نمایشهای موضعی آنها همخط نیستند، تحقیق‌کنید که این بردارها مستقل‌اند؛ (ب) با نشان‌دادن‌اینکه هر بردار $a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ را می‌توان به‌صورت $c(2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) + d(3\mathbf{i} - \mathbf{j})$ نوشت که درآن c و d اسکالرند، تحقیق کنید که بردارها یک پایه تشکیل می‌دهند.

(راهنمایی. c و d را برحسب a_1 و a_2 بیابید.)

۳۷. به دو جملهٔ اول تمرین ۳۶ بازمی‌گردیم. قضیه‌ای داریم که می‌گوید دو بردار برای فضای برداری V_2 پایه تشکیل می‌دهند فقط اگر مستقل باشند. با اعمال زیر نشان دهید که این قضیه برای دو بردار $\langle 3, -2\rangle$ و $\langle -6, 4\rangle$ برقرار است: (آ) با نشان دادن اینکه نمایشهای موضعی آنها همخط نیستند، تحقیق کنید که بردارها وابسته‌اند (مستقل نیستند)؛ (ب) با اختیار برداری خاص و نشان دادن اینکه نمی‌توان آن را به‌صورت $c(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) + d(-6\mathbf{i} + 4\mathbf{j})$ نوشت که درآن c و d اسکالر باشد، تحقیق کنید که بردارها یک پایه تشکیل نمی‌دهند.

۳۸. مجموعهٔ $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \dots, \mathbf{V}_n$ از بردارها را وابستهٔ خطی گویند اگر و فقط اگر اسکالرهایی چون $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$، که همه صفر نیستند، وجود داشته باشند بطوری که

$$k_1\mathbf{V}_1 + k_2\mathbf{V}_2 + k_3\mathbf{V}_3 + \cdots + k_n\mathbf{V}_n = \mathbf{0}$$

نشان دهیدکه هرگاه $\mathbf{V}_1 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$، $\mathbf{V}_2 = \mathbf{i} + 4\mathbf{j}$، و $\mathbf{V}_3 = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$، آنگاه $\mathbf{V}_1$، $\mathbf{V}_2$، و $\mathbf{V}_3$ وابستهٔ خطی‌اند.

۳.۱۶ حاصل ضرب نقطه‌ای

در بخش ۱.۱۶ جمع و تفریق بردارها و ضرب بردارها در اسکالر تعریف شدند. اما ضرب دو بردار درنظر گرفته نشد. حال عمل ضرب دو بردار را درنظر می‌گیریم که حاصلش *حاصل ضرب نقطه‌ای* نام دارد.

۱.۳.۱۶ تعریف. هرگاه $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2\rangle$ و $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2\rangle$ دو بردار در V_2 باشند، آنگاه *حاصل ضرب نقطه‌ای* $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$، که با $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ نموده می‌شود، عبارت است از

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \langle a_1, a_2\rangle \cdot \langle b_1, b_2\rangle = a_1b_1 + a_2b_2$$

حاصل‌ضرب نقطه‌ای دو بردار عددی حقیقی (یا اسکالر) است و بردار نیست. گاهی آن را *حاصل ضرب اسکالر* یا *حاصل ضرب داخلی* می‌نامند.

توضیح ۱. هرگاه $\mathbf{A} = \langle 2, -3\rangle$ و $\mathbf{B} = \langle -\frac{1}{2}, 4\rangle$، آنگاه

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \langle 2, -3\rangle \cdot \langle -\tfrac{1}{2}, 4\rangle = (2)(-\tfrac{1}{2}) + (-3)(4) = -13$$

حاصل‌ضربهای نقطه‌ای زیر سودمندند و صحت آنها به‌آسانی تحقیق می‌شود (ر.ک. تمرین ۵).

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1 \qquad (۱)$$

$$\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = 1 \qquad (۲)$$

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0 \qquad (۳)$$

قضیهٔ زیر می‌گوید که ضرب نقطه‌ای تعویض‌پذیر ونسبت به جمع برداری پخشپذیر است.

۲.۳.۱۶ قضیه. *هرگاه* $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$، و $\mathbf{C}$ *بردارهایی در* V_2 *باشند، آنگاه*

(یک) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ *(قانون تعویض‌پذیری)*

(دو) $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$ *(قانون پخشپذیری)*

اثبات (یک) و (دو) به‌عنوان تمرین گذارده شده است (ر.ک. تمرینهای ۶ و ۷).
چون $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ اسکالر است، عبارت $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$ بی‌معنی است. لذا، شرکتپذیری ضرب نقطه‌ای درنظر گرفته نمی‌شود.

برخی از قوانین دیگر ضرب نقطه‌ای در قضیهٔ زیر داده شده است.

۳.۳.۱۶ قضیه. *هرگاه* $\mathbf{A}$ *و* $\mathbf{B}$ *بردارهایی در* V_2 *بوده و* c *یک اسکالر باشد، آنگاه*

(یک) $c(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (c\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}$؛

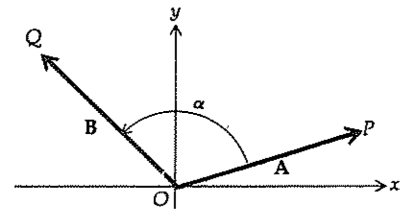
(دو) $0\cdot\mathbf{A} = 0$؛

(سه) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2$.

اثبات به‌عنوان تمرین‌گذارده می‌شود (ر.ک. تمرینهای ۸ تا ۱۰).
حال زاویهٔ بین دو بردار را درنظر می‌گیریم، و این ما را به‌عبارت دیگری برای حاصل ضرب نقطه‌ای دو بردار می‌رساند.

۴.۳.۱۶ تعریف. فرض‌کنیم $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو بردار ناصفر باشند بطوری‌که $\mathbf{A}$ مضرب اسکالری از $\mathbf{B}$ نباشد. هرگاه $\overrightarrow{OP}$ نمایش موضعی $\mathbf{A}$ و $\overrightarrow{OQ}$ نمایش موضعی $\mathbf{B}$ باشد، آنگاه **زاویهٔ بین بردارهای A و B** زاویهٔ مثبت بین $\overrightarrow{OP}$ و $\overrightarrow{OQ}$ درون مثلث حاصل از نقاط O، P، و Q تعریف‌می‌شود. هرگاه $\mathbf{A} = c\mathbf{B}$، که درآن c اسکالر است، آنگاه اگر $c > 0$، زاویهٔ بین بردارها 0 رادیان است؛ اگر $c < 0$، زاویهٔ بین بردارها π رادیان می‌باشد.

از تعریف ۴.۳.۰۱۶ نتیجه می‌شود که اگر α زاویهٔ بین دو بردار باشد، $0 \le \alpha \le \pi$. شکل ۱.۳.۰۱۶ زاویهٔ بین دو بردار را درصورتی که $\mathbf{A}$ مضرب اسکالری از $\mathbf{B}$ نباشد نشان می‌دهد.



شکل ۱.۳.۰۱۶

قضیهٔ زیر مهمترین نکته درباب حاصل‌ضرب نقطه‌ای دو بردار را بازگو می‌کند.

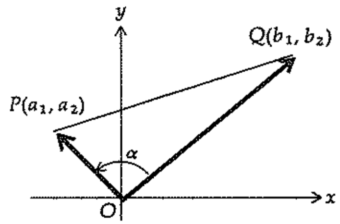
۵.۳.۰۱۶ قضیه. *هرگاه α زاویهٔ بین دو بردار ناصفر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ باشد، آنگاه*

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\alpha \tag{۴}$$

برهان. فرض‌کنیم $\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ و $\mathbf{B} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$. همچنین، $\overrightarrow{OP}$ نمایش موضعی $\mathbf{A}$ و OQ نمایش موضعی $\mathbf{B}$ باشد. دراین صورت، زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ زاویه در مبداء در مثلث POQ است (ر.ک. شکل ۲.۳.۰۱۶)؛ P نقطهٔ (a_1, a_2) و Q نقطهٔ (b_1, b_2) است. در مثلث POQ، $|\mathbf{A}|$ طول ضلع OP و $|\mathbf{B}|$ طول ضلع OQ است. درنتیجه، از قانون کسینوسها داریم

$$\cos\alpha = \frac{|\mathbf{A}|^2 + |\mathbf{B}|^2 - |\overline{PQ}|^2}{2|\mathbf{A}||\mathbf{B}|}$$
$$= \frac{(a_1{}^2 + a_2{}^2) + (b_1{}^2 + b_2{}^2) - [(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2]}{2|\mathbf{A}||\mathbf{B}|}$$
$$= \frac{2a_1b_1 + 2a_2b_2}{2|\mathbf{A}||\mathbf{B}|}$$
$$= \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|}$$

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|}$$



شکل ۲.۳.۰۱۶

که از آن بدست می‌آوریم

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\alpha$$

قضیهٔ ۵.۳.۰۱۶ میگوید که حاصل ضرب نقطه‌ای دو بردار حاصل‌ضرب اندازه‌های بردارها در کسینوس زاویهٔ بین آنها می‌باشد.

توضیح ۲. هرگاه $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$، $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$، و α زاویهٔ بین $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ باشد، از قضیهٔ ۵.۳.۰۱۶ داریم

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|}$$
$$= \frac{(3)(2) + (-2)(1)}{\sqrt{9+4}\,\sqrt{4+1}}$$
$$= \frac{6-2}{\sqrt{13}\,\sqrt{5}}$$
$$= \frac{4}{\sqrt{65}}$$

در بخش ۲.۰۱۶ دیدیم که اگر دو بردار ناصفر مضارب اسکالر یکدیگر باشند، بردارها همجهت یا مختلف‌الجهت‌اند. لذا، تعریف زیر را خواهیم داشت.

۶.۳.۰۱۶ تعریف. دو بردار را **موازی** گوییم اگر و فقط اگر یکی از بردارها مضرب اسکالری از دیگری باشد.

توضیح ۳. بردارهای $\langle 3, -4\rangle$ و $\langle \frac{3}{4}, -1\rangle$ موازی‌اند، زیرا $\langle 3, -4\rangle = 4\langle \frac{3}{4}, -1\rangle$.

اگر $\mathbf{A}$ یک بردار باشد، $0\mathbf{A} = \mathbf{0}$؛ لذا، از تعریف ۶.۳.۰۱۶ معلوم می‌شود که بردار صفر با هر بردار موازی است.

نشان دادن اینکه دو بردار ناصفر موازی‌اند اگر و فقط‌اگر زاویهٔ بین آنها 0 یا π باشد را به‌عنوان تمرین می‌گذاریم (ر.ک. تمرین ۳۷).

هرگاه $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ بردارهای ناصفری باشند، از (۴) معلوم می‌شود که

$\cos\alpha = 0$ اگر و فقط‌اگر $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$

چون $0 \le \alpha \le \pi$، از این حکم نتیجه می‌شود که

$\alpha = \frac{1}{2}\pi$ اگر و فقط‌اگر $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$

لذا، تعریف زیر را خواهیم داشت.

۷.۳.۰۱۶ تعریف. دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ را **متعامد** (عمود برهم) گوییم اگر و فقط‌اگر $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$.

توضیح ۴. بردارهای $\langle -4,5\rangle$ و $\langle 10,8\rangle$ متعامدند، زیرا

$$\begin{aligned}\langle -4,5\rangle\cdot\langle 10,8\rangle &= (-4)(10) + (5)(8)\\ &= 0\end{aligned}$$

اگر $\mathbf{A}$ یک بردار باشد، $\mathbf{0}\cdot\mathbf{A} = 0$؛ پس، از تعریف ۷.۳.۰۱۶ معلوم می‌شود که بردار صفر بر هر بردار عمود است.

مثال ۱. به فرض آنکه $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ و $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + k\mathbf{j}$، که درآن k اسکالر است، (آ) k را طوری بیابید که $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ متعامد باشند؛ (ب) k را طوری بیابید که $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ موازی باشند.

حل

(آ) طبق تعریف ۷.۳.۰۱۶، $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ متعامدند اگر و فقط‌اگر $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$؛ یعنی،

$$(3)(2) + 2(k) = 0$$

بنابراین،

$$k = -3$$

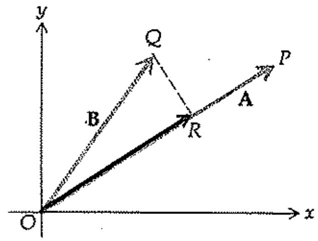
(ب) ازتعریف ۶.۳.۰۱۶ معلوم می‌شود که $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ موازی‌اند اگر و فقط‌اگر اسکالری مانند

c باشد بطوری که $\langle 3,2\rangle = c\langle 2,k\rangle$؛ یعنی،

$$3 = 2c \quad \text{و} \quad 2 = ck$$

با حل همزمان این معادلات بدست می‌آوریم $k = \frac{4}{3}$.

تعبیر هندسی حاصل‌ضرب نقطه‌ای با توجه به **تصویر** یک بردار روی دیگری بدست می‌آید. فرض کنیم $\overrightarrow{OP}$ و $\overrightarrow{OQ}$ بترتیب، نمایشهای بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ باشند. ر.ک. شکل ۳.۳.۰۱۶. تصویر $\overrightarrow{OQ}$ درجهت $\overrightarrow{OP}$ پاره‌خط‌جهتدار $\overrightarrow{OR}$ است، که درآن R پای‌عمود

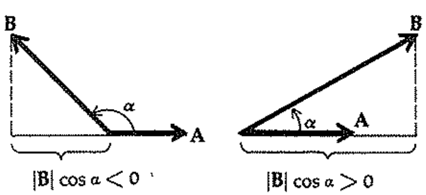


شکل ۳.۳.۰۱۶

از Q به خط حاوی $\overrightarrow{OP}$ است. برداری که $\overrightarrow{OR}$ نمایش آن است **تصویر برداری** بردار $\mathbf{B}$ روی‌بردار $\mathbf{A}$ نام دارد. **تصویر اسکالر** $\mathbf{B}$ روی $\mathbf{A}$ مساوی $|\mathbf{B}|\cos\alpha$ تعریف می‌شود، که در آن α زاویهٔ بین $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ است. توجه کنید که $|\mathbf{B}|\cos\alpha$ ممکن است بسته به α. مثبت یا منفی باشد. چون $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\alpha$، پس

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}|(|\mathbf{B}|\cos\alpha) \tag{۵}$$

لذا، حاصل‌ضرب نقطه‌ای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ مساوی حاصل‌ضرب اندازهٔ $\mathbf{A}$ در تصویر اسکالر $\mathbf{B}$ روی $\mathbf{A}$ است. ر.ک. شکل ۴.۳.۰۱۶ (آ) و (ب). چون ضرب‌نقطه‌ای تعویض‌پذیر است، $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$



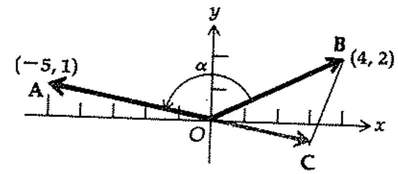
(آ) (ب)

شکل ۴.۳.۰۱۶

نیز مساوی حاصل‌ضرب اندازهٔ $\mathbf{B}$ در تصویر اسکالر $\mathbf{A}$ روی $\mathbf{B}$ است.

مثال ۲. به فرض آنکه $\mathbf{A} = -5\mathbf{i} + \mathbf{j}$ و $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ ، تصویر برداری **B** روی **A** را بیابید.

حل. شکل ۵.۳.۱۶ نمایشهای موضعی بردارهای **A** و **B** و نیز **C** ، که تصویر برداری



شکل ۵.۳.۱۶

B روی **A** است، را نشان می‌دهد. از (۵) داریم

$$|\mathbf{B}|\cos\alpha = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{A}|} = \frac{(-5)(4)+(1)(2)}{\sqrt{26}} = \frac{-18}{\sqrt{26}}$$

بنابراین، $|\mathbf{C}| = 18/\sqrt{26}$. چون $\cos\alpha < 0$ ، $\frac{1}{2}\pi < \alpha < \pi$ ؛ درنتیجه، جهت **C** با جهت **A** مخالف است. لذا، $\mathbf{C} = c\mathbf{A}$ ، و $c < 0$. دراین صورت،

$$\mathbf{C} = -5c\mathbf{i} + c\mathbf{j}$$

چون $|\mathbf{C}| = 18/\sqrt{26}$ ،

$$\frac{18}{\sqrt{26}} = \sqrt{25c^2 + c^2}$$

لذا، $c = -\frac{9}{13}$ ، که از آن نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{C} = \frac{45}{13}\mathbf{i} - \frac{9}{13}\mathbf{j}$$

هرگاه $\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ ، آنگاه

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{i} = a_1 \quad \text{و} \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{j} = a_2$$

بنابراین، حاصل ضرب نقطه‌ای **A** و **i** مولفهٔ **A** در جهت **i** ، و حاصل ضرب نقطه‌ای **A** و **j** مولفهٔ **A** درجهت **j** را می‌دهد. برای تعمیم این نتیجه، فرض کنیم **U** یک بردار یکه باشد. از (۵) داریم

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{U} = |\mathbf{A}|(|\mathbf{U}|\cos\alpha) = |\mathbf{A}|\cos\alpha$$

و درنتیجه، $\mathbf{A}\cdot\mathbf{U}$ تصویر اسکالر **A** روی **U** است، که **مولفهٔ** بردار **A** در جهت **U** نام

دارد. بطور کلی، **مولفهٔ** بردار **A** در جهت بردار **B** تصویر اسکالر **A** روی بردار یکه‌ای درجهت **B** می‌باشد.

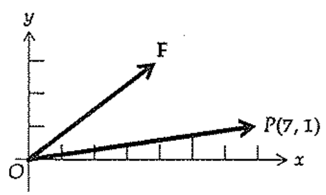
در بخش ۵.۷ گفتیم که اگر نیروی ثابت F پوند جسمی را درامتداد خطی مستقیم d فوت حرکت دهد و نیرو درجهت حرکت باشد، چنانچه کار انجام شده توسط این نیرو W فوت ـ پوند باشد، $W = Fd$. حال فرض کنیم نیروی ثابت درامتداد خط حرکت نباشد. دراین حالت فیزیکدانان **کار** انجام شده را **حاصل ضرب مولفهٔ نیرو درامتداد خط حرکت در تغییر مکان** تعریف می‌کنند. اگر جسم از نقطهٔ A تا نقطهٔ B حرکت کند، برداری که $\overrightarrow{AB}$ نمایش آن است **بردار تغییر مکان** نامیده و با $\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})$ نموده می‌شود. درنتیجه، اگر اندازهٔ بردار نیروی ثابت **F** به پوند، فاصلهٔ A تا B به‌فوت، و α زاویهٔ بین بردارهای **F** و $\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})$ بوده، و نیز W کار انجام شده توسط نیروی **F** درحرکت جسم از A به B به فوت ـ پوند باشد،

$$\begin{aligned} W &= (|\mathbf{F}|\cos\alpha)|\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})| \\ &= |\mathbf{F}||\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})|\cos\alpha \\ &= \mathbf{F}\cdot\mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) \end{aligned}$$

مثال ۳. فرض کنید نیروی **F** دارای اندازهٔ 6 lb بوده و $\frac{1}{6}\pi$ زاویه‌ای باشد که جهتش را بدست می‌دهد. کار انجام شده توسط **F** در حرکت یک جسم در امتداد خطی مستقیم از مبداء تا نقطهٔ $P(7, 1)$ ، که فاصله به فوت است، را بیابید.

حل. شکل ۶.۳.۱۶ نمایشهای موضعی **F** و $\mathbf{V}(\overrightarrow{OP})$ را نشان می‌دهد. هرگاه W ft-lb کار انجام شده باشد، آنگاه

$$W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{V}(\overrightarrow{OP})$$



شکل ۶.۳.۱۶

$\mathbf{F} = \langle 6\cos\frac{1}{6}\pi, 6\sin\frac{1}{6}\pi\rangle = \langle 3\sqrt{3}, 3\rangle$ ، و $\mathbf{V}(\overrightarrow{OP}) = \langle 7, 1\rangle$. درنتیجه،

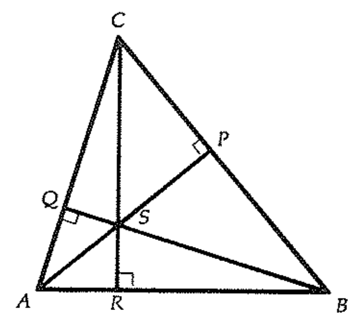
$$W = \langle 3\sqrt{3}, 3\rangle \cdot \langle 7, 1\rangle = 21\sqrt{3} + 3 \approx 39.37$$

لذا، کار انجام شده مساوی 39.37 ft-lb است.

بردارها نمایشهایی هندسی دارند که از دستگاه مختصات مستقل‌اند. بدین خاطر می‌توان از آنالیز برداری در اثبات بعضی از قضایای هندسهٔ مسطحه استفاده کرد. این مطلب در مثال زیر مجسم شده است.

مثال ۴. به‌کمک آنالیز برداری ثابت کنید ارتفاعات یک مثلث دریک نقطه متقارب‌اند.

حل. فرض‌کنیم ABC مثلثی باشد که ارتفاعات AP و BQ آن در نقطهٔ S هم راقطع کرده‌اند. خطی از C و S می‌کشیم که AB را درنقطهٔ R قطع کند. می‌خواهیم ثابت کنیم RC بر AB عمود است (ر.ک. شکل ۷۰۳۰۱۶).



شکل ۷۰۳۰۱۶

فرض کنیم $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AS}, \overrightarrow{BS}, \overrightarrow{CS}$ نمایشهای بردارها باشند. همچنین، $\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})$ برداری باشد که پاره‌خط جهتدار $\overrightarrow{AB}$ یک نمایش آن است. بهمین نحو، $\mathbf{V}(\overrightarrow{BC})$، $\mathbf{V}(\overrightarrow{AC})$، $\mathbf{V}(\overrightarrow{AS})$، $\mathbf{V}(\overrightarrow{BS})$، و $\mathbf{V}(\overrightarrow{CS})$ بردارهایی باشند که پاره خطهای جهتدار داخل پرانتز نمایشهای آنها می‌باشند.

چون AP ارتفاع مثلث است،

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{AS}) \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{BC}) = 0 \qquad (۶)$$

همچنین، از اینکه BQ ارتفاع مثلث است،

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{BS}) \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{AC}) = 0 \qquad (۷)$$

برای اثبات اینکه RC بر AB عمود است نشان می‌دهیم که

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{CS}) \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) = 0$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(\overrightarrow{CS}) \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) &= \mathbf{V}(\overrightarrow{CS}) \cdot [\mathbf{V}(\overrightarrow{AC}) + \mathbf{V}(\overrightarrow{CB})] \\
&= \mathbf{V}(\overrightarrow{CS}) \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{AC}) + \mathbf{V}(\overrightarrow{CS}) \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{CB}) \\
&= [\mathbf{V}(\overrightarrow{CB}) + \mathbf{V}(\overrightarrow{BS})] \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{AC}) \\
&\qquad + [\mathbf{V}(\overrightarrow{CA}) + \mathbf{V}(\overrightarrow{AS})] \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{CB}) \\
&= \mathbf{V}(\overrightarrow{CB}) \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{AC}) + \mathbf{V}(\overrightarrow{BS}) \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{AC}) \\
&\qquad + \mathbf{V}(\overrightarrow{CA}) \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{CB}) + \mathbf{V}(\overrightarrow{AS}) \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{CB})
\end{aligned}$$

از تعویض $\mathbf{V}(\overrightarrow{CA})$ با $-\mathbf{V}(\overrightarrow{AC})$ و استفاده از (۶) و (۷)، داریم

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(\overrightarrow{CS}) \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) &= \mathbf{V}(\overrightarrow{CB}) \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{AC}) + 0 + [-\mathbf{V}(\overrightarrow{AC})] \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{CB}) + 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

بنابراین، ارتفاعات AP، BQ، و RC در یک نقطه برخورد دارند.

تمرینات ۳۰۱۶

در تمرینهای ۱ تا ۴، $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ را بیابید.

۱. $\mathbf{A} = \langle -1, 2\rangle; \mathbf{B} = \langle -4, 3\rangle$

۲. $\mathbf{A} = \langle \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\rangle; \mathbf{B} = \langle \frac{5}{2}, \frac{4}{3}\rangle$

۳. $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}; \mathbf{B} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

۴. $\mathbf{A} = -2\mathbf{i}; \mathbf{B} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$

۵. نشان دهید که $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1; \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1; \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$

۶. قضیهٔ ۲۰۳۰۱۶ (یک) را ثابت کنید.

۷. قضیهٔ ۲۰۳۰۱۶ (دو) را ثابت کنید.

۸. قضیهٔ ۳۰۳۰۱۶ (یک) را ثابت کنید.

۹. قضیهٔ ۳۰۳۰۱۶ (دو) را ثابت کنید.

۱۰. قضیهٔ ۳۰۳۰۱۶ (سه) را ثابت کنید.

در تمرینهای ۱۱ تا ۱۴، اگر α زاویهٔ بین $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ به‌رادیان باشد، $\cos\alpha$ را پیدا نمایید.

۱۱. $\mathbf{A} = \langle 4, 3\rangle; \mathbf{B} = \langle 1, -1\rangle$

۱۲. $\mathbf{A} = \langle -2, -3\rangle; \mathbf{B} = \langle 3, 2\rangle$

۱۳. $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} - 12\mathbf{j}; \mathbf{B} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

۱۴. $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}; \mathbf{B} = -5\mathbf{j}$

۱۵. k را طوری بیابید که زاویهٔ بین بردارهای مثال ۱ دراین بخش $\frac{1}{4}\pi$ باشد.

۱۶. فرض‌کنید $\mathbf{A} = k\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ و $\mathbf{B} = k\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$، که درآنها k یک اسکالر است. k را

طوری بیابید که $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ متعامد باشند.

۱۷. فرض کنید $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} - k\mathbf{j}$ و $\mathbf{B} = k\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$، که در آنها k یک اسکالر است. (آ) k را طوری بیابید که $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ متعامد باشند؛ (ب) k را طوری بیابید که $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ موازی باشند.

۱۸. k را طوری بیابید که بردارهای تمرین ۱۶ مختلف‌الجهت باشند.

۱۹. فرض‌کنید $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$ و $\mathbf{B} = \mathbf{i} + k\mathbf{j}$، که‌درآن k یک‌اسکالر است. k راطوری بیابید که زاویهٔ بین $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ مساوی $\frac{1}{4}\pi$ باشد.

۲۰. دو بردار یکه بیابید که هریک نمایشی با نقطهٔ شروع $(2,4)$ داشته و بر سهمی $y = x^2$ دراین نقطه مماس باشد.

۲۱. دوبردار یکه بیابید که هریک نمایشی با نقطهٔ شروع $(2,4)$ داشته و به سهمی $y = x^2$ دراین نقطه عمود باشد.

۲۲. هرگاه $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$، بردارهای یکه‌ای بیابید که متعامد به $\mathbf{A}$ باشند.

۲۳. هرگاه $\mathbf{A}$ بردار $a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ باشد، بردارهای یکه‌ای بیابید که متعامد به $\mathbf{A}$ باشند.

۲۴. هرگاه $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} - 9c\mathbf{j}$ و $\mathbf{B} = 7\mathbf{i} - 4c\mathbf{j}$، نشان دهید که مقداری حقیقی برای c که $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ را متعامد کند وجود ندارد.

۲۵. هرگاه $\mathbf{A} = -8\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ و $\mathbf{B} = 7\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$، تصویر برداری $\mathbf{A}$ روی $\mathbf{B}$ را بیابید.

۲۶. تصویر برداری $\mathbf{B}$ روی $\mathbf{A}$ را برای بردارهای تمرین ۲۵ بیابید.

۲۷. مولفهٔ بردار $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$ را درجهت بردار $\mathbf{B} = 7\mathbf{i} + \mathbf{j}$ بیابید.

۲۸. برای بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ تمرین ۲۷، مولفهٔ بردار $\mathbf{B}$ در جهت بردار $\mathbf{A}$ را پیدا کنید.

۲۹. بردار $\mathbf{F}$ نمایش نیرویی است به اندازهٔ 8 lb که زاویه‌ای که جهتش را می‌دهد $\frac{1}{3}\pi$ رادیان است. کار انجام شده توسط این نیرو درحرکت یک جسم (آ) در امتداد محور x از مبداء تا نقطهٔ $(6,0)$ و (ب) در امتداد محور y از مبداء تا نقطهٔ $(0,6)$ را بیابید. فاصله بافوت سنجیده می‌شود.

۳۰. بردار $\mathbf{F}$ نمایش نیرویی است به‌اندازهٔ 10 lb که زاویه‌ای که جهتش را می‌دهد $\frac{1}{4}\pi$ رادیان است. کار انجام شده توسط این نیرو درحرکت یک جسم درامتداد محور y از نقطهٔ $(0,-2)$ تا نقطهٔ $(0,5)$ را بیابید. فاصله بافوت سنجیده می‌شود.

۳۱. بردار $\mathbf{F}$ نمایش نیرویی است به‌اندازهٔ 9 lb که زاویه‌ای که جهتش را می‌دهد $\frac{2}{3}\pi$ رادیان است. کار انجام شده توسط این نیرو در حرکت یک جسم از مبداء تا نقطهٔ $(-4,-2)$ را بیابید. فاصله بافوت سنجیده می‌شود.

۳۲. دو نیرو که با بردارهای $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ نموده می‌شوند بر ذره‌ای اثر می‌کنند و آن را در امتداد خطی مستقیم از نقطهٔ $(2,5)$ تا نقطهٔ $(7,3)$ حرکت می‌دهند. اگر $\mathbf{F}_1 = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$ و $\mathbf{F}_2 = -4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$، اندازهٔ نیروها به‌پوند، و فاصله به‌فوت باشد، کار انجام شده توسط این دو نیرو که با هم اثر می‌کنند را بیابید.

۳۳. هرگاه $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ بردار باشند، ثابت کنید

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\cdot(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} + 2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}$$

۳۴. به‌کمک آنالیز برداری ثابت کنید میانه‌های یک مثلث دریک نقطه تلاقی دارند.

۳۵. به‌کمک آنالیز برداری ثابت کنید پاره‌خط‌واصل بین اوساط دو ضلع یک مثلث موازی ضلع سوم و طولش نصف طول ضلع سوم است.

۳۶. به‌کمک آنالیز برداری ثابت‌کنید پاره‌خط‌واصل بین اوساط دو ضلع غیر موازی یک ذوزنقه موازی اضلاع موازی و طولش نصف مجموع طولهای اضلاع موازی می‌باشد.

۳۷. ثابت‌کنید دو بردار ناصفر موازی‌اند اگر و فقط اگر زاویهٔ بین آنها 0 یا π رادیان باشد.

۴.۱۶ توابع برداری و معادلات پارامتری

حال تابعی درنظر می‌گیریم که قلمروش مجموعه‌ای از اعداد حقیقی و بردش مجموعه‌ای از بردارهاست. چنین تابع را یک **تابع برداری** می‌نامند.

۱.۴.۱۶ تعریف. فرض‌کنیم f و g دو تابع حقیقی از یک متغیر حقیقی t باشند. دراین‌صورت، به‌ازای هر عدد t در قلمرو مشترک f و g برداری مانند $\mathbf{R}$ وجود دارد که‌با

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} \qquad (1)$$

تعریف می‌شود، و $\mathbf{R}$ را یک **تابع برداری** می‌نامند.

توضیح ۱. فرض‌کنیم

$$\mathbf{R}(t) = \sqrt{t-2}\,\mathbf{i} + (t-3)^{-1}\mathbf{j}$$

همچنین،

$$f(t) = \sqrt{t-2} \quad \text{و} \quad g(t) = (t-3)^{-1}$$

قلمرو $\mathbf{R}$ مجموعهٔ مقادیری از t است که به‌ازای آنها $f(t)$ و $g(t)$ هر دوتعریف شده‌اند. مقدار تابعی $f(t)$ به‌ازای $t \geq 2$، و $g(t)$ به‌ازای جمیع اعداد حقیقی جز 3

تعریف شده است. لذا، قلمرو $\mathbf{R}$ عبارت است از $\{t | t \geq 2, t \neq 3\}$.

هرگاه $\mathbf{R}$ تابعی برداری باشد که با (۱) تعریف می‌شود، وقتی t همهٔ مقادیر در قلمرو $\mathbf{R}$ را بگیرد، نقطهٔ انتهایی نمایش موضعی بردار $\mathbf{R}(t)$ منحنی C را رسم می‌کند. به‌ازای هرچنین بردار t نقطه‌ای مانند (x, y) بر C وجود دارد که در آن

$$y = g(t) \quad \text{و} \quad x = f(t) \qquad (۲)$$

منحنی C ممکن است با (۱) یا (۲) تعریف شود. معادلهٔ (۱) ***معادلهٔ برداری*** C، و معادلات (۲) ***معادلات پارامتری*** C نام دارند. متغیر t یک ***پارامتر*** است. منحنی C ***نمودار*** نیز خوانده می‌شود؛ یعنی، مجموعهٔ تمام نقاط (x, y) صادق در (۲) نمودار تابع برداری $\mathbf{R}$ است.

معادلهٔ برداری یک منحنی، و نیز معادلات پارامتری یک منحنی، به منحنی درهر نقطه جهت می‌دهد. یعنی، اگر منحنی را مسیر یک ذره تصور کنیم، می‌توان جهت مثبت در امتداد یک منحنی را جهتی گرفت که در آن ذره با افزایش پارامتر t حرکت می‌کند. درچنین حالت، t را می‌توان زمان گرفت، و بردار $\mathbf{R}(t)$ ***بردار موضع*** نام دارد. گاهی $\mathbf{R}(t)$ را ***بردار شعاعی*** می‌نامند.

اگر پارامتر t را از دو معادلهٔ (۲) حذف کنیم، یک معادله از x و y بدست می‌آید، که ***معادلهٔ دکارتی*** C نام دارد. ممکن است با حذف پارامتر به معادله‌ای دکارتی برسیم که نمودارش از نمودار تعریف شده با معادلهٔ برداری یا معادلات پارامتری نقطهٔ بیشتری داشته باشد. این وضع در مثال ۴ رخ می‌دهد.

مثال ۱. معادلهٔ برداری $\mathbf{R}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\sin t\,\mathbf{j}$ داده شده‌است. (آ) نمودار این معادله را رسم کرده، و (ب) معادلهٔ دکارتی نمودار را بیابید.

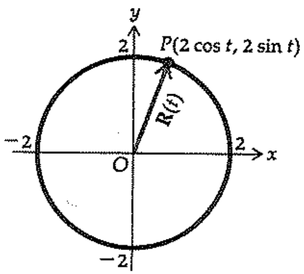
حل. قلمرو $\mathbf{R}$ مجموعهٔ جمیع اعداد حقیقی است. مقادیر x و y به‌ازای مقادیر خاصی از t را می‌توان به‌جدول درآورد. اندازهٔ بردار موضع را پیدا می‌کنیم. به‌ازای هر t،

$$|\mathbf{R}(t)| = \sqrt{4\cos^2 t + 4\sin^2 t} = 2\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 2$$

لذا، نقطهٔ انتهایی‌نمایش موضعی هربردار $\mathbf{R}(t)$ در دو واحدی مبداء است. با این فرض که t همهٔ اعداد در بازهٔ بستهٔ $[0, 2\pi]$ را می‌گیرد، دایره‌ای بدست می‌آید که مرکزش در مبداء و شعاعش 2 است. این تمام نمودار است، زیرا هر مقدار از t نقطه‌ای بر این دایره بدست می‌دهد. دایره در شکل ۱۰۴۰۱۶ نموده شده است. معادلات پارامتری

نمودار عبارتند از

$$y = 2\sin t \quad \text{و} \quad x = 2\cos t$$



شکل ۱۰۴۰۱۶

معادلهٔ دکارتی نمودار را می‌توان با حذف t از دو معادلهٔ پارامتری پیدا کرد، که وقتی طرفین هر معادله را مجذور کرده و بهم بیفزاییم، خواهیم داشت

$$x^2 + y^2 = 4$$

$y^2 = 4\sin^2 t$
$x^2 = 4\cos^2 t$ ... $4(\cos^2 t + \sin^2 t)$

همانطورکه قبلاً گفتیم، با حذف t از معادلات پارامتری (۲) یک معادلهٔ دکارتی بدست می‌آید. معادلهٔ دکارتی y را به‌طور ضمنی یا صریح به‌صورت یک یا چند تابع از x تعریف می‌کند. یعنی، هرگاه $x = f(t)$ و $y = g(t)$، آنگاه $y = h(x)$. اگر h تابع مشتق‌پذیری از x و f تابع مشتق‌پذیری از t باشد، از قاعدهٔ زنجیره‌ای نتیجه می‌شود که

$$D_t y = (D_x y)(D_t x)$$

یا

$$g'(t) = (h'(x))(f'(t))$$

یا، با نماد دیفرانسیل،

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{\cancel{dx}}\frac{\cancel{dx}}{dt}$$

اگر $dx/dt \neq 0$، می‌توان طرفین معادلهٔ فوق را بر dx/dt تقسیم کرد و بدست آورد

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \qquad (۳)$$

معادلهٔ (۳) ما را قادر می‌سازد تا از معادلات پارامتری مشتق y را نسبت به x مستقیماً پیدا کنیم.

چون $d^2y/dx^2 = d(y')/dx$،

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{d(y')}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} \tag{۴}$$

مثال ۲. به‌فرض آنکه $x = 3t^2$ و $y = 4t^3$، dy/dx و d^2y/dx^2 را بدون حذف t بیابید.

حل. از (۳) داریم

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{12t^2}{6t} = 2t$$

چون $y' = 2t$ ، $d(y')/dt = 2$. لذا، از (۴) داریم

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(y')}{dx} = \frac{\dfrac{d(y')}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{2}{6t} = \frac{1}{3t}$$

مثال ۳. (آ) نمودار منحنی تعریف شده با معادلات پارامتری مثال ۲ را رسم کنید، و (ب) معادلهٔ دکارتی نمودار در (آ) را بیابید.

حل. چون $x = 3t^2$ ، x هرگز منفی نیست. جدول ۱.۴.۱۶ مقادیر x و y را به‌ازای مقادیر خاصی از t بدست می‌دهد. چون $D_xy = 2t$ ، وقتی $t = 0$ ، $D_xy = 0$ ؛ لذا، خط مماس در نقطهٔ $(0, 0)$ افقی است. نمودار در شکل ۲.۴.۱۶ نموده شده است. از دو معادلهٔ پارامتری $x = 3t^2$ و $y = 4t^3$ بدست می‌آوریم $x^3 = 27t^6$ و $y^2 = 16t^6$. بنابراین،

$$\frac{x^3}{27} = \frac{y^2}{16}$$

t	x	y
0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	3	4
2	12	32
$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$
-1	3	-4
-2	12	-32

جدول ۱.۴.۱۶

یا، معادلاً،

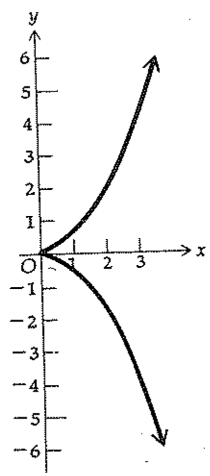
$$16x^3 = 27y^2 \tag{۵}$$

که معادلهٔ دکارتی مطلوب است.

توضیح ۲. اگر از معادلهٔ (۵) به‌طور ضمنی مشتق بگیریم،

$$48x^2 = 54y\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x^2}{9y}$$



شکل ۲.۴.۱۶

با گذاردن x و y از معادلات پارامتری داده شده برحسب t ، بدست می‌آوریم

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8(3t^2)^2}{9(4t^3)} = 2t$$

که با مقدار dy/dx در مثال ۲ یکی است.

مثال ۴. نمودار منحنی تعریف شده با معادلات پارامتری

$$y = \sinh t \quad \text{و} \quad x = \cosh t \qquad (۶)$$

را رسم کنید، و معادلهٔ دکارتی نمودار را بیابید.

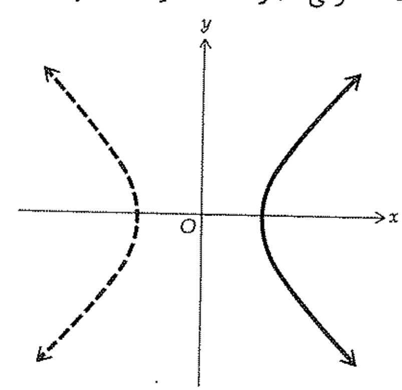
حل. با مجذور کردن طرفین معادلات داده شده‌و تفریق آنها، داریم

$$x^2 - y^2 = \cosh^2 t - \sinh^2 t$$

این معادله بخاطر اتحاد $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ خواهد شد

$$x^2 - y^2 = 1$$

این معادلهٔ یک هذلولی متساوی الاضلاع است. توجه کنید که به‌ازای هر عدد حقیقی t ، $\cosh t$ هیچگاه از 1 کمتر نیست. لذا، منحنی تعریف شده با معادلات پارامتری (۶) فقط از نقاط واقع بر شاخهٔ راست هذلولی تشکیل شده است. این منحنی در شکل ۳۰۴۰۱۶ نموده شده است. معادلهٔ دکارتی عبارت است از $x^2 - y^2 = 1$ ، که در آن $x \geq 1$.



شکل ۳۰۴۰۱۶

از نتایج مثال ۴ می‌توان استفاده کرد و نشان داد که چگونه مقادیر تابعی توابع سینوس و کسینوس هیپربولیک دارای همان رابطه با هذلولی متساوی الاضلاع‌اند که‌توابع

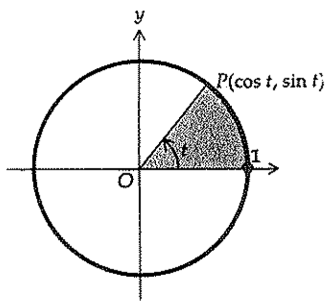
مثلثاتی سینوس و کسینوس با دایره دارند. معادلات

$$y = \sin t \quad \text{و} \quad x = \cos t \qquad (۷)$$

مجموعه‌ای از معادلات پارامتری دایرهٔ یکه‌اند، چرا که اگر با مجذور کردن طرفین و افزودنشان بهم t را از آنها حذف کنیم، خواهیم داشت

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

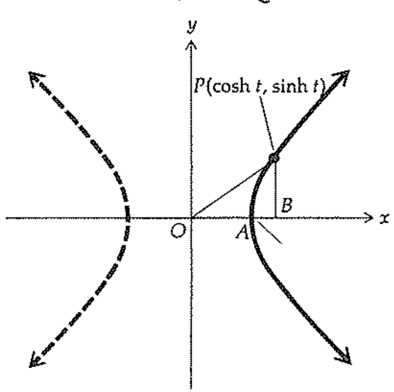
پارامتر t درمعادلات (۷) را می‌توان زاویهٔ بین محور x و خط از مبداء تا $P(\cos t, \sin t)$ بر دایرهٔ یکه تعبیر کرد. ر.ک. شکل ۴۰۴۰۱۶ . چون مساحت قطاع مستدیر به شعاع



شکل ۶۰۴۰۱۶

r و زاویهٔ مرکزی t رادیان مساوی $\frac{1}{2}r^2t$ است، مساحت قطاع مستدیر در شکل ۴۰۴۰۱۶ مساوی $\frac{1}{2}t$ است زیرا $r = 1$.

در مثال ۴ نشان دادیم که معادلات پارامتری (۶) مجموعه‌ای از معادلات پارامتری شاخهٔ راست هذلولی متساوی‌الاضلاع $x^2 - y^2 = 1$ است. این هذلولی **هذلولی یکه** نام



شکل ۵۰۴۰۱۶

دارد. فرض‌کنیم $P(\cosh t, \sinh t)$ نقطه‌ای براین منحنی باشد، و مساحت قطاع AOP در شکل ۵.۴.۱۶ را حساب می‌کنیم. قطاع AOP ناحیهٔ محدود به محور x، خط OP، و قوس AP از هذلولی یکه است. اگر A_1 مساحت قطاع AOP، A_2 مساحت مثلث OBP، و A_3 مساحت ناحیهٔ ABP باشد،

(۸)
$$A_1 = A_2 - A_3$$

از فرمول مساحت مثلث داریم

(۹)
$$A_2 = \tfrac{1}{2}\cosh t \sinh t$$

A_3 را با انتگرالگیری پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A_3 &= \int_0^t \sinh u \, d(\cosh u) \\ &= \int_0^t \sinh^2 u \, du \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^t (\cosh 2u - 1)\, du \\ &= \tfrac{1}{4}\sinh 2u - \tfrac{1}{2}u \Big]_0^t \end{aligned}$$

و درنتیجه،

(۱۰)
$$A_3 = \tfrac{1}{2}\cosh t \sinh t - \tfrac{1}{2}t$$

با گذاردن (۹) و (۱۰) در (۸)، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} A_1 &= \tfrac{1}{2}\cosh t \sinh t - (\tfrac{1}{2}\cosh t \sinh t - \tfrac{1}{2}t) \\ &= \tfrac{1}{2}t \end{aligned}$$

لذا، مساحت قطاع مستدیر AOP در شکل ۴.۴.۱۶ و مساحت قطاع AOP درشکل ۵.۴.۱۶، در هر حالت، نصف مقدار پارامتر نقطهٔ P است. در مورد دایرهٔ یکه، پارامتر t زاویهٔ AOP به رادیان است. پارامتر t در هذلولی یکه به‌عنوان زاویه تعبیر نمی‌شود؛ با اینحال، گاهی در رابطه با t از اصطلاح **رادیان هذلولوی** استفاده می‌شود.

در بخش ۱.۱۴، که قضیهٔ مقدار میانگین کشی (۳.۱.۱۴) بیان و اثبات شد، گفتیم که تعبیر هندسی آن در این بخش خواهد شد چرا که برای این کار معادلات پارامتری مورد نیاز می‌باشند. بهیاد آورید که این قضیه می‌گوید که هرگاه f و g دو تابع باشند بطوری که (یک) f و g بر $[a, b]$ پیوسته باشند، (دو) f و g بر (a, b) مشتق‌پذیر باشند، و (سه) به‌ازای هر x در (a, b)، $g'(x) \neq 0$، آنگاه عددی مانند z در بازهٔ

باز (a, b) هست بطوری که

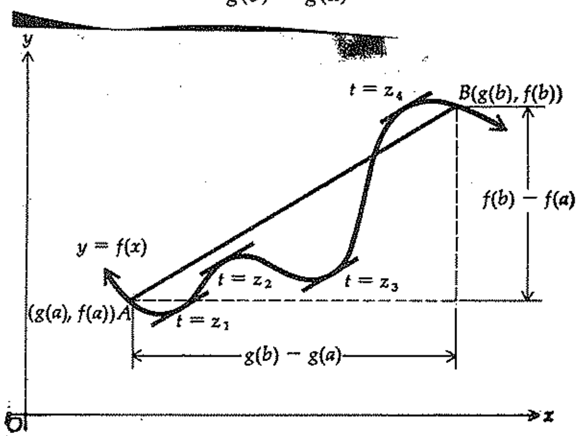
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

شکل ۶.۴.۱۶ یک منحنی به معادلات پارامتری $x = g(t)$ و $y = f(t)$، که $a \le t \le b$، را نشان می‌دهد. شیب منحنی این شکل در نقطه‌ای خاص عبارت است از

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

و شیب پاره‌خط ماربر نقاط $A(g(a), f(a))$ و $B(g(b), f(b))$ مساوی است با

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

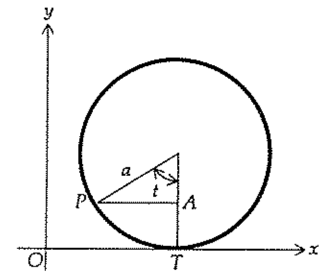


شکل ۶.۴.۱۶

قضیهٔ مقدار میانگین کشی می‌گوید که شیبها به‌ازای دست‌کم یک مقدار از t بین a و b مساوی‌اند. برای منحنی شکل ۶.۴.۱۶ چهار مقدار از t وجود دارند که در قضیه صدق می‌کنند: $t = z_1$، $t = z_2$، $t = z_3$، و $t = z_4$.

حال نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان از معادلات پارامتری برای تعریف منحنی توصیف شده با یک حرکت فیزیکی استفاده کرد. منحنیی که درنظر می‌گیریم یک **چرخزاد** است، منحنیی که توسط نقطه‌ای از محیط یک دایره ضمن غلطش در امتداد خطی مستقیم رسم می‌شود. فرض‌کنیم این دایره به شعاع a باشد. همچنین، خط مستقیم ثابتی که دایره روی آن می‌غلطد محور x بوده، و مبداء یکی از نقاط تماس نقطهٔ داده شدهٔ P با

محور x باشد. ر.ک. شکل ۷.۴.۱۶، که دایره را پس از اینکه به‌اندازهٔ t رادیان غلطیده نشان می‌دهد.



شکل ۷.۴.۱۶

از شکل ۷.۴.۱۶ داریم

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{OT}) + \mathbf{V}(\overrightarrow{TA}) + \mathbf{V}(\overrightarrow{AP}) = \mathbf{V}(\overrightarrow{OP}) \qquad (۱۱)$$

$|\mathbf{V}(\overrightarrow{OT})| = PT$ طول قوس $= at$. چون جهت $\mathbf{V}(\overrightarrow{OT})$ در امتداد محور مثبت x است،

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{OT}) = at\mathbf{i} \qquad (۱۲)$$

همچنین، $|\mathbf{V}(\overrightarrow{TA})| = a - a\cos t$. وچون جهت $\mathbf{V}(\overrightarrow{TA})$ با جهت $\mathbf{j}$ یکی است،

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{TA}) = a(1 - \cos t)\mathbf{j} \qquad (۱۳)$$

$|\mathbf{V}(\overrightarrow{AP})| = a\sin t$ ، وجهت $\mathbf{V}(\overrightarrow{AP})$ با جهت $-\mathbf{i}$ یکی است؛ بنابراین،

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{AP}) = -a\sin t\mathbf{i} \qquad (۱۴)$$

با گذاردن (۱۲)، (۱۳)، و (۱۴) در (۱۱)، بدست می‌آوریم

$$at\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j} - a\sin t\mathbf{i} = \mathbf{V}(\overrightarrow{OP})$$

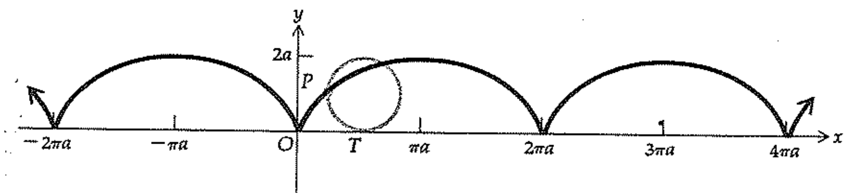
یا، معادلاً،

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{OP}) = a(t - \sin t)\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j} \qquad (۱۵)$$

معادلهٔ (۱۵) معادلهٔ برداری چرخزاد است. درنتیجه، معادلات پارامتری چرخزاد عبارتند از

$$y = a(1 - \cos t) \quad \text{و} \quad x = a(t - \sin t) \qquad (۱۶)$$

که در آنها t عدد حقیقی دلخواهی است. بخشی از چرخزاد در شکل ۸.۴.۱۶ نموده شده است.



شکل ۸.۴.۱۶

تمرینات ۴.۱۶

در تمرینهای ۱ تا ۶، قلمرو تابع برداری $\mathbf{R}$ را بیابید.

۱. $\mathbf{R}(t) = (1/t)\mathbf{i} + \sqrt{4-t}\,\mathbf{j}$

۲. $\mathbf{R}(t) = (t^2+3)\mathbf{i} + (t-1)\mathbf{j}$

۳. $\mathbf{R}(t) = (\sin^{-1} t)\mathbf{i} + (\cos^{-1} t)\mathbf{j}$

۴. $\mathbf{R}(t) = \ln(t+1)\mathbf{i} + (\tan^{-1} t)\mathbf{j}$

۵. $\mathbf{R}(t) = \sqrt{t^2-9}\,\mathbf{i} + \sqrt{t^2+2t-8}\,\mathbf{j}$

۶. $\mathbf{R}(t) = \sqrt{t-4}\,\mathbf{i} + \sqrt{4-t}\,\mathbf{j}$

در تمرینهای ۷ تا ۱۲، dy/dx و d^2y/dx^2 را بدون حذف پارامتر پیدا کنید.

۷. $x = 3t, y = 2t^2$

۸. $x = 1 - t^2, y = 1 + t$

۹. $x = t^2e^t, y = t\ln t$

۱۰. $x = e^{2t}, y = 1 + \cos t$

۱۱. $x = a\cos t, y = b\sin t$

۱۲. $x = a\cosh t, y = b\sinh t$

در تمرینهای ۱۳ تا ۱۹، نمودار معادلهٔ برداری داده شده را رسم کرده و معادلهٔ دکارتی نمودار را بیابید.

۱۳. $\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + (t+1)\mathbf{j}$

۱۴. $\mathbf{R}(t) = (t-2)\mathbf{i} + (t^2+4)\mathbf{j}$

۱۵. $\mathbf{R}(t) = 3\cosh t\mathbf{i} + 5\sinh t\mathbf{j}$

۱۶. $\mathbf{R}(t) = \dfrac{4}{t^2}\mathbf{i} + \dfrac{4}{t}\mathbf{j}$

۱۷. $\mathbf{R}(t) = \sec t\mathbf{i} + \tan t\mathbf{j};\ t \text{ in } (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$

۱۸. $\mathbf{R}(t) = \cos t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j};\ t \text{ in } [0, \frac{1}{2}\pi]$

۱۹. $\mathbf{R}(t) = 4\cos t\mathbf{i} + 3\sin t\mathbf{j};\ t \text{ in } [0, 2\pi]$

۲۰. معادلهٔ خط مماس بر منحنی $x = 1 + 3\sin t, y = 2 - 5\cos t$ در نقطه‌ای که $t = \frac{1}{3}\pi$ را بیابید.

۲۱. معادلهٔ خط مماس بر منحنی $x = 2\sin t, y = 5\cos t$ در نقطه‌ای که $t = \frac{1}{4}\pi$ رابیابید.

در تمرینهای ۲۲ تا ۲۴، معادلات خطوط مماس افقی را با یافتن مقادیری از t که $dy/dt = 0$ بیابید، و معادلات خطوط مماس قائم را با یافتن مقادیری از t که $dx/dt = 0$ پیدا کنید. سپس نمودار جفت معادلات پارامتری داده شده را رسم نمایید.

۲۲ . $x = t^2 + t, y = t^2 - t$ ۲۳ . $x = 4t^2 - 4t, y = 1 - 4t^2$

۲۴ . $x = \dfrac{3at}{1 + t^3}, y = \dfrac{3at^2}{1 + t^3}$

۲۵ . معادلات پارامتری **چرخنده** عبارتند از

$$x = at - b\sin t \quad \text{و} \quad y = a - b\cos t$$

نشان دهید که اگر $a > b > 0$ ، چرخنده خط‌مماس قائم ندارد .

۲۶ . یک گلوله طوری حرکت می‌کند که مختصات موضعش در لحظهٔ t از معادلات $x = 60t$ و $y = 80t - 16t^2$ بدست می‌آید . مسیر گلوله را رسم نمایید .

۲۷ . dy/dx ، d^2y/dx^2 ، و d^3y/dx^3 را درنقطه‌ای از چرخزاد به معادلات (۱۶) که در آن وقتی x در بازهٔ بستهٔ $[0, 2\pi a]$ بیشترین مقدار را دارد پیدا کنید .

۲۸ . نشان دهید که شیب خط مماس در $t = t_1$ بر چرخزاد به معادلات (۱۶) مساوی $\cot \frac{1}{2}t_1$ است . سپس نتیجه بگیرید که خط‌مماس وقتی $t = 2n\pi$ ، که در آن n عدد صحیح دلخواهی است ، قائم می‌باشد .

۲۹ . یک **بتوچرخزاد** منحنیی است که توسط نقطهٔ p از یک دایره به شعاع b که داخل دایرهٔ ثابتی به شعاع a ، که $a > b$ ، می‌غلطد رسم می‌شود . اگر مبداء در مرکز دایرهٔ ثابت باشد ، $A(a, 0)$ یکی از نقاطی باشد که p با دایرهٔ ثابت تماس می‌یابد ، B نقطهٔ متحرک تماس دو دایره بوده ، و پارامتر t زاویهٔ AOB به رادیان باشد ، ثابت کنید معادلات پارامتری بتوچرخزاد عبارتند از

$$x = (a - b)\cos t + b\cos\frac{a - b}{b}t$$

و

$$y = (a - b)\sin t - b\sin\frac{a - b}{b}t$$

۳۰ . هرگاه‌در تمرین ۲۹ $a = 4b$ ، یک **بتوچرخزاد با چهار بازگشت** داریم . نشان دهید که معادلات پارامتری این منحنی عبارتند از $x = a\cos^3 t$ و $y = a\sin^3 t$.

۳۱ . با استفاده از معادلات پارامتری تمرین ۳۰ ، معادلهٔ دکارتی بتوچرخزاد با چهار بازگشت را یافته ، و نمودار معادلهٔ حاصل را رسم نمایید .

۳۲ . معادلات پارامتری **کشاننده** عبارتند از

$$x = t - a\tanh\frac{t}{a} \qquad y = a\,\mathrm{sech}\frac{t}{a}$$

منحنی را بازای $a = 4$ رسم نمایید .

۳۳ . ثابت کنید پارامتر t در معادلات پارامتری یک کشاننده (ر.ک. تمرین ۳۲) قطع x خط مماس است .

۳۴ . نشان دهید که کشانندهٔ تمرین ۳۲ منحنیی است که طول هر خط مماس از نقطهٔ تماس تا نقطهٔ برخورد با محور x ثابت و مساوی a است .

۳۵ . مساحت ناحیهٔ محدود به محور x و یک قوس از چرخزاد به معادلات (۱۶) را پیدا کنید .

۳۶ . مرکزگون ناحیهٔ تمرین ۳۵ را پیدا کنید .

۵.۱۶ حساب توابع برداری

حال به حدود ، پیوستگی ، و مشتق توابع برداری می‌پردازیم .

۱.۵.۱۶ تعریف . فرض کنیم $\mathbf{R}$ یک تابع برداری باشد که مقادیر تابعی آن عبارتنداز

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$$

دراین صورت ، **حد $\mathbf{R}(t)$ وقتی t به t_1 نزدیک شود** ، با

$$\lim_{t \to t_1} \mathbf{R}(t) = \left[\lim_{t \to t_1} f(t)\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{t \to t_1} g(t)\right]\mathbf{j}$$

تعریف می‌شود ، مشروط براینکه $\lim_{t \to t_1} f(t)$ و $\lim_{t \to t_1} g(t)$ هر دو موجود باشند .

توضیح ۱ . هرگاه $\mathbf{R}(t) = \cos t\mathbf{i} + 2e^t\mathbf{j}$ ، آنگاه

$$\lim_{t \to 0} \mathbf{R}(t) = (\lim_{t \to 0} \cos t)\mathbf{i} + (\lim_{t \to 0} 2e^t)\mathbf{j} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

۲.۵.۱۶ تعریف . تابع برداری $\mathbf{R}$ در t_1 **پیوسته** است اگر و فقط اگر سه شرط زیر برقرار شوند :

(یک) $\mathbf{R}(t_1)$ موجود باشد؛

(دو) $\lim_{t \to t_1} \mathbf{R}(t)$ موجود باشد؛

(سه) $\lim_{t \to t_1} \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(t_1)$

از تعاریف ۱۰۵۰۱۶ و ۲۰۵۰۱۶ معلوم می‌شود که تابع برداری $\mathbf{R}$ ، که با $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ تعریف می‌شود، در t_1 پیوسته است اگر و فقط اگر f و g در آن پیوسته باشند.

در تعریف زیر عبارت

$$\frac{\mathbf{R}(t+\Delta t) - \mathbf{R}(t)}{\Delta t}$$

برای نشان دادن تقسیم یک بردار بر یک اسکالر بکار می‌رود. این عبارت یعنی

$$\frac{1}{\Delta t}[\mathbf{R}(t+\Delta t) - \mathbf{R}(t)]$$

۳۰۵۰۱۶ تعریف. هرگاه $\mathbf{R}$ یک تابع برداری باشد، مشتق $\mathbf{R}$ یک تابع برداری است، که با $\mathbf{R}'$ نموده و با

$$\mathbf{R}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{R}(t+\Delta t) - \mathbf{R}(t)}{\Delta t}$$

درصورت وجود این حد، تعریف می‌شود.

گاهی از نماد $D_t\mathbf{R}(t)$ به‌جای $\mathbf{R}'(t)$ استفاده می‌شود.

قضیهٔ زیر از تعریف ۳۰۵۰۱۶ و تعریف مشتق یک تابع حقیقی نتیجه می‌شود.

۴۰۵۰۱۶ قضیه. *هرگاه تابع برداری $\mathbf{R}$ با*

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} \qquad (1)$$

تعریف شده باشد، آنگاه، درصورت وجود $f'(t)$ و $g'(t)$ ،

$$\mathbf{R}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j}$$

برهان. از تعریف ۳۰۵۰۱۶ داریم

$$\mathbf{R}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{R}(t+\Delta t) - \mathbf{R}(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[f(t+\Delta t)\mathbf{i} + g(t+\Delta t)\mathbf{j}] - [f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}]}{\Delta t}$$

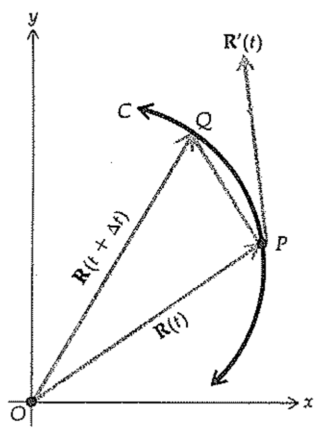
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[f(t+\Delta t) - f(t)]}{\Delta t}\mathbf{i} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[g(t+\Delta t) - g(t)]}{\Delta t}\mathbf{j}$$

$$= f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j}$$

جهت $\mathbf{R}'(t)$ درامتداد خط مماس در نقطهٔ $(f(t), g(t))$ بر نمودار $\mathbf{R}(t)$ به معادلهٔ برداری (۱) است. یعنی، جهت $\mathbf{R}'(t)$ با $\theta\ (0 \le \theta < 2\pi)$ داده می‌شود، که

$$\tan\theta = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx}$$

تعبیر هندسی تعریف ۳۰۵۰۱۶ با توجه به نمایشهای بردارهای $\mathbf{R}(t)$ ، $\mathbf{R}(t+\Delta t)$ ، و $\mathbf{R}'(t)$ بدست می‌آید. به‌شکل ۱۰۵۰۱۶ رجوع کنید. منحنی C به‌وسیلهٔ نقطهٔ انتهایی



شکل ۱۰۵۰۱۶

نمایش موضعی $\mathbf{R}(t)$ وقتی t جمیع مقادیر در قلمرو $\mathbf{R}$ را می‌گیرد رسم شده است. فرض کنیم $\overrightarrow{OP}$ نمایش موضعی $\mathbf{R}(t)$ و $\overrightarrow{OQ}$ نمایش موضعی $\mathbf{R}(t+\Delta T)$ باشد. دراین صورت، $\mathbf{R}(t+\Delta t) - \mathbf{R}(t)$ برداری‌است که $\overrightarrow{PQ}$ یک‌نمایش‌آن‌است. اگر بردار $\mathbf{R}(t+\Delta t) - \mathbf{R}(t)$ را در اسکالر $1/\Delta t$ ضرب کنیم، برداری با همان جهت و اندازه‌ای مساوی $1/|\Delta t|$ ضربدر اندازهٔ $\mathbf{R}(t+\Delta t) - \mathbf{R}(t)$ بدست می‌آید. وقتی Δt به صفر نزدیک شود، بردار $[\mathbf{R}(t+\Delta t) - \mathbf{R}(t)]/\Delta t$ به برداری نزدیک می‌شود که یکی از نمایشهای آن بر منحنی C در نقطهٔ P مماس است.

توضیح ۲. هرگاه $\mathbf{R}(t) = (2 + \sin t)\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$ ، آنگاه

$$\mathbf{R}'(t) = \cos t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j}$$

مشتقات مراتب بالاتر توابع برداری همانند مشتقات مراتب بالاتر توابع حقیقی تعریف می‌شوند. درنتیجه، اگر $\mathbf{R}$ یک تابع برداری تعریف شده با $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ باشد، مشتق دوم $\mathbf{R}$ ، که با $\mathbf{R}''(t)$ نموده می‌شود، عبارت است از

$$\mathbf{R}''(t) = D_t[\mathbf{R}'(t)]$$

نماد $D_t^2\mathbf{R}(t)$ را می‌توان به‌جای $\mathbf{R}''(t)$ بکار برد. با اعمال قضیهٔ ۴.۵.۱۶ بر $\mathbf{R}'(t)$ ، درصورت وجود $f''(t)$ و $g''(t)$ ، خواهیم داشت

$$\mathbf{R}''(t) = f''(t)\mathbf{i} + g''(t)\mathbf{j}$$

توضیح ۳. هرگاه $\mathbf{R}(t) = (\ln t)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{t}\right)\mathbf{j}$ ، آنگاه

$$\mathbf{R}'(t) = \frac{1}{t}\mathbf{i} - \frac{1}{t^2}\mathbf{j}$$

و

$$\mathbf{R}''(t) = -\frac{1}{t^2}\mathbf{i} + \frac{2}{t^3}\mathbf{j}$$

۵.۵.۱۶ تعریف. تابع برداری $\mathbf{R}$ را بر یک بازه **مشتق‌پذیر** گوییم اگر $\mathbf{R}'(t)$ به‌ازای هر t در این بازه موجود باشد.

قضایای زیر فرمولهای مشتقگیری از توابع برداری را بدست می‌دهند. برهانها مبتنی بر قضیهٔ ۴.۵.۱۶ و قضایای مشتقگیری از توابع حقیقی‌اند.

۶.۵.۱۶ قضیه. *هرگاه $\mathbf{R}$ و $\mathbf{Q}$ توابع برداری مشتق‌پذیری بر یک بازه باشند، آنگاه $\mathbf{R} + \mathbf{Q}$ بر این بازه مشتق‌پذیر است، و*

$$D_t[\mathbf{R}(t) + \mathbf{Q}(t)] = D_t\mathbf{R}(t) + D_t\mathbf{Q}(t)$$

اثبات این قضیه را به‌عنوان تمرین می‌گذاریم (ر.ک. تمرین ۲۱).

مثال ۱. اگر $\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + (t - 1)\mathbf{j}$ و $\mathbf{Q}(t) = \sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$ ، قضیهٔ ۶.۵.۱۶ را تحقیق نمایید.

حل

$$\begin{aligned}
D_t[\mathbf{R}(t) + \mathbf{Q}(t)] &= D_t([t^2\mathbf{i} + (t-1)\mathbf{j}] + [\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}]) \\
&= D_t[(t^2 + \sin t)\mathbf{i} + (t - 1 + \cos t)\mathbf{j}] \\
&= (2t + \cos t)\mathbf{i} + (1 - \sin t)\mathbf{j} \\
D_t\mathbf{R}(t) + D_t\mathbf{Q}(t) &= D_t[t^2\mathbf{i} + (t-1)\mathbf{j}] + D_t(\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}) \\
&= (2t\mathbf{i} + \mathbf{j}) + (\cos t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j}) \\
&= (2t + \cos t)\mathbf{i} + (1 - \sin t)\mathbf{j}
\end{aligned}$$

بنابراین، $D_t[\mathbf{R}(t) + \mathbf{Q}(t)] = D_t\mathbf{R}(t) + D_t\mathbf{Q}(t)$.

۷.۵.۱۶ قضیه. *هرگاه $\mathbf{R}$ و $\mathbf{Q}$ توابع برداری مشتق‌پذیری بر یک بازه باشند، آنگاه $\mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}$ بر این بازه مشتق‌پذیر است، و*

$$D_t[\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{Q}(t)] = [D_t\mathbf{R}(t)] \cdot \mathbf{Q}(t) + \mathbf{R}(t) \cdot [D_t\mathbf{Q}(t)]$$

برهان. فرض‌کنیم $\mathbf{R}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + g_1(t)\mathbf{j}$ و $\mathbf{Q}(t) = f_2(t)\mathbf{i} + g_2(t)\mathbf{j}$. دراین صورت، طبق قضیهٔ ۴.۵.۱۶،

$$D_t\mathbf{R}(t) = f_1'(t)\mathbf{i} + g_1'(t)\mathbf{j} \quad \text{و} \quad D_t\mathbf{Q}(t) = f_2'(t)\mathbf{i} + g_2'(t)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{Q}(t) = [f_1(t)][f_2(t)] + [g_1(t)][g_2(t)]$$

درنتیجه،

$$\begin{aligned}
&D_t[\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{Q}(t)] \\
&= [f_1'(t)][f_2(t)] + [f_1(t)][f_2'(t)] + [g_1'(t)][g_2(t)] + [g_1(t)][g_2'(t)] \\
&= \{[f_1'(t)][f_2(t)] + [g_1'(t)][g_2(t)]\} + \{[f_1(t)][f_2'(t)] + [g_1(t)][g_2'(t)]\} \\
&= [D_t\mathbf{R}(t)] \cdot \mathbf{Q}(t) + \mathbf{R}(t) \cdot [D_t\mathbf{Q}(t)]
\end{aligned}$$

مثال ۲. قضیهٔ ۷.۵.۱۶ را برای بردارهای مثال ۱ تحقیق کنید.

حل . $\mathbf{R}(t)\cdot\mathbf{Q}(t) = t^2 \sin t + (t-1)\cos t$. بنابراین ،

$$D_t[\mathbf{R}(t)\cdot\mathbf{Q}(t)] = 2t\sin t + t^2\cos t + \cos t + (t-1)(-\sin t)$$

$$D_t[\mathbf{R}(t)\cdot\mathbf{Q}(t)] = (t+1)\sin t + (t^2+1)\cos t \qquad (۲)$$

چون

$$D_t\mathbf{R}(t) = D_t[t^2\mathbf{i} + (t-1)\mathbf{j}] = 2t\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

داریم

$$[D_t\mathbf{R}(t)]\cdot\mathbf{Q}(t) = (2t\mathbf{i} + \mathbf{j})\cdot(\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j})$$
$$= 2t\sin t + \cos t$$

و چون

$$D_t\mathbf{Q}(t) = D_t[\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}] = \cos t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j}$$

خواهیم داشت

$$\mathbf{R}(t)\cdot[D_t\mathbf{Q}(t)] = [t^2\mathbf{i} + (t-1)\mathbf{j}]\cdot(\cos t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j})$$
$$= t^2\cos t - (t-1)\sin t$$

پس ،

$$[D_t\mathbf{R}(t)]\cdot\mathbf{Q}(t) + \mathbf{R}(t)\cdot[D_t\mathbf{Q}(t)] = (2t\sin t + \cos t) + [t^2\cos t - (t-1)\sin t]$$

لذا ،

$$[D_t\mathbf{R}(t)]\cdot\mathbf{Q}(t) + \mathbf{R}(t)\cdot[D_t\mathbf{Q}(t)] = (t+1)\sin t + (t^2+1)\cos t \qquad (۳)$$

از مقایسهٔ (۲) با (۳) می‌بینیم که قضیهٔ ۷.۵.۱۶ برقرار است .

۸.۵.۱۶ قضیه . *هرگاه **R** تابع برداری مشتقپذیری بر یک بازه بوده و f تابع حقیقی مشتقپذیری بر این بازه باشد ، آنگاه*

$$D_t\{[f(t)][\mathbf{R}(t)]\} = [D_tf(t)]\mathbf{R}(t) + f(t)\,D_t\mathbf{R}(t)$$

اثبات به‌عنوان تمرین گذارده می‌شود (ر.ک. تمرین ۲۲) .

قضیهٔ زیر قاعدهٔ زنجیره‌ای برای توابع برداری است . اثبات ، که به‌عنوان تمرین گذارده شده (ر.ک. تمرین ۲۳) ، مبتنی بر قضایای ۷.۷.۲ و ۱۰.۷.۳ است ، که در رابطه با نتایج مشابه برای توابع حقیقی می‌باشند .

۹.۵.۱۶ قضیه . *فرض‌کنیم **F** یک تابع برداری ، h یک تابع حقیقی باشد بطوری که $\phi = h(t)$ ، و $\mathbf{G}(t) = \mathbf{F}(h(t))$. هرگاه h در t و **F** در $h(t)$ پیوسته باشند ، آنگاه **G** در t پیوسته می‌باشد . بعلاوه ، هرگاه $D_t\phi$ و $D_\phi\mathbf{G}(t)$ موجود باشند ، آنگاه $D_t\mathbf{G}(t)$ وجود دارد و از رابطهٔ زیر بدست می‌آید :*

$$D_t\mathbf{G}(t) = [D_\phi\mathbf{G}(t)]D_t\phi$$

حال انتگرال نامعین (یا پادمشتق) یک تابع برداری را تعریف می‌کنیم .

۱۰.۵.۱۶ تعریف . هرگاه **Q** تابعی برداری باشد که

$$\mathbf{Q}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$$

آنگاه *انتگرال نامعین* $\mathbf{Q}(t)$ با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود :

$$\int \mathbf{Q}(t)\,dt = \mathbf{i}\int f(t)\,dt + \mathbf{j}\int g(t)\,dt \qquad (۴)$$

این تعریف با تعریف انتگرال نامعین یک تابع حقیقی سازگار است ، چرا که اگر از طرفین (۴) نسبت به t مشتق بگیریم ،

$$D_t\int \mathbf{Q}(t)\,dt = \mathbf{i}D_t\int f(t)\,dt + \mathbf{j}D_t\int g(t)\,dt$$

که نتیجه می‌دهد

$$D_t\int \mathbf{Q}(t)\,dt = \mathbf{i}f(t) + \mathbf{j}g(t)$$

به‌ازای هر انتگرال نامعین طرف راست (۴) یک ثابت اسکالر دلخواه ظاهر می‌شود . وقتی هریک از این اسکالرها را در **i** یا **j** ضرب کنیم ، یک بردار ثابت دلخواه در مجموع ظاهر خواهد شد . درنتیجه ،

$$\int \mathbf{Q}(t)\,dt = \mathbf{R}(t) + \mathbf{C}$$

که درآن $D_t\mathbf{R}(t) = \mathbf{Q}(t)$ و **C** یک بردار ثابت دلخواه است .

مثال ۳ . کلیترین تابع برداری بیابید که مشتقش $\mathbf{Q}(t) = \sin t\mathbf{i} - 3\cos t\mathbf{j}$ باشد .

حل. هرگاه $D_t\mathbf{R}(t) = \mathbf{Q}(t)$ ، آنگاه $\mathbf{R}(t) = \int \mathbf{Q}(t)\,dt$ ، یا

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(t) &= \mathbf{i}\int \sin t\,dt - 3\mathbf{j}\int \cos t\,dt\\ &= \mathbf{i}(-\cos t + C_1) - 3\mathbf{j}(\sin t + C_2)\\ &= -\cos t\mathbf{i} - 3\sin t\mathbf{j} + (C_1\mathbf{i} - 3C_2\mathbf{j})\\ &= -\cos t\mathbf{i} - 3\sin t\mathbf{j} + \mathbf{C}\end{aligned}$$

مثال ۴. بردار $\mathbf{R}(t)$ را طوری بیابید که $D_t\mathbf{R}(t) = e^{-t}\mathbf{i} + e^t\mathbf{j}$ و $\mathbf{R}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$.

حل

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{i}\int e^{-t}\,dt + \mathbf{j}\int e^t\,dt$$

درنتیجه،

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{i}(-e^{-t} + C_1) + \mathbf{j}(e^t + C_2)$$

چون $\mathbf{R}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ ،

$$\mathbf{i} + \mathbf{j} = \mathbf{i}(-1 + C_1) + \mathbf{j}(1 + C_2)$$

بنابراین،

$$C_1 - 1 = 1 \quad \text{و} \quad C_2 + 1 = 1$$
$$C_1 = 2 \qquad C_2 = 0$$

لذا،

$$\mathbf{R}(t) = (-e^{-t} + 2)\mathbf{i} + e^t\mathbf{j}$$

قضیهٔ زیر بعدها مفید واقع می‌شود.

۱۱٫۵٫۱۶ قضیه. *هرگاه $\mathbf{R}$ یک‌تابع برداری مشتق‌پذیر بریک بازه بوده و $|\mathbf{R}(t)|$ به‌ازای هر t دراین بازه ثابت باشد، آنگاه بردارهای $\mathbf{R}(t)$ و $D_t\mathbf{R}(t)$ متعامد می‌باشند.*

برهان. قرار می‌دهیم $|\mathbf{R}(t)| = k$. دراین صورت، طبق قضیهٔ ۳٫۳٫۱۶ (سه)،

$$\mathbf{R}(t)\cdot\mathbf{R}(t) = k^2$$

با مشتقگیری از طرفین نسبت به t و استفاده از قضیهٔ ۷٫۵٫۱۶ ، بدست می‌آوریم

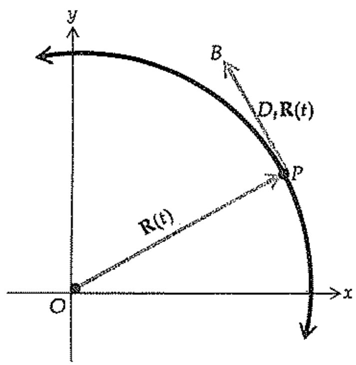
$$[D_t\mathbf{R}(t)]\cdot\mathbf{R}(t) + \mathbf{R}(t)\cdot[D_t\mathbf{R}(t)] = 0$$

بنابراین،

$$2\mathbf{R}(t)\cdot D_t\mathbf{R}(t) = 0$$

چون حاصل‌ضرب نقطه‌ای $\mathbf{R}(t)$ و $D_t\mathbf{R}(t)$ صفر است، از تعریف ۷٫۳٫۱۶ نتیجه می‌شود که $\mathbf{R}(t)$ و $D_t\mathbf{R}(t)$ متعامد می‌باشند.

تعبیر هندسی قضیهٔ ۱۱٫۵٫۱۶ واضح است. هرگاه بردار $\mathbf{R}(t)$ اندازهٔ ثابت داشته باشد، نمایش موضعی $\overrightarrow{OP}$ از $\mathbf{R}(t)$ دارای نقطهٔ پایان P بر دایره به مرکز مبداء و شعاع k است. درنتیجه، نمودار $\mathbf{R}$ این دایره است. چون $\mathbf{R}(t)$ و $D_t\mathbf{R}(t)$ متعامدند، $\overrightarrow{OP}$ بریک نمایش $D_t\mathbf{R}(t)$ عمود است. شکل ۲٫۵٫۱۶ یکچهارم دایره، نمایش موضعی $\overrightarrow{OP}$ از



شکل ۲٫۵٫۱۶

$\mathbf{R}(t)$ ، و نمایش $\overrightarrow{PB}$ از $D_t\mathbf{R}(t)$ را نشان می‌دهد.

تمرینات ۵٫۱۶

در تمرینهای ۱ تا ۵، حد مذکور را درصورت وجود بیابید.

۱. $\mathbf{R}(t) = (3t - 2)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j};\ \lim_{t\to 2}\mathbf{R}(t)$

۲. $\mathbf{R}(t) = (t - 2)\mathbf{i} + \dfrac{t^2 - 4}{t - 2}\mathbf{j};\ \lim_{t\to 2}\mathbf{R}(t)$

۳. $\mathbf{R}(t) = 2\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j};\ \lim_{t\to \pi/2}\mathbf{R}(t)$

۴. $\mathbf{R}(t) = \dfrac{t^2 - 2t - 3}{t - 3}\mathbf{i} + \dfrac{t^2 - 5t + 6}{t - 3}\mathbf{j};\ \lim_{t\to 3}\mathbf{R}(t)$

۵ . $\mathbf{R}(t) = e^{t+1}\mathbf{i} + |t+1|\mathbf{j};\ \lim_{t\to -1}\mathbf{R}(t)$

در تمرینهای ۶ تا ۱۴، $\mathbf{R}'(t)$ و $\mathbf{R}''(t)$ را پیدا کنید .

۶ . $\mathbf{R}(t) = (t^2 - 3)\mathbf{i} + (2t+1)\mathbf{j}$

۷ . $\mathbf{R}(t) = e^{2t}\mathbf{i} + \ln t\,\mathbf{j}$

۸ . $\mathbf{R}(t) = \cos 2t\,\mathbf{i} + \tan t\,\mathbf{j}$

۹ . $\mathbf{R}(t) = \tan^{-1} t\,\mathbf{i} + 2^t\mathbf{j}$

۱۰ . $\mathbf{R}(t) = \dfrac{t-1}{t+1}\mathbf{i} + \dfrac{t-2}{t}\mathbf{j}$

۱۱ . $\mathbf{R}(t) = (t^2+4)^{-1}\mathbf{i} + \sqrt{1-5t}\,\mathbf{j}$

۱۲ . $\mathbf{R}(t) = \sqrt{2t+1}\,\mathbf{i} + (t-1)^2\mathbf{j}$

۱۳ . $\mathbf{R}(t) = 5\sin 2t\,\mathbf{i} - \sec 4t\,\mathbf{j}$

۱۴ . $\mathbf{R}(t) = (e^{3t}+2)\mathbf{i} + 2e^{3t}\mathbf{j}$

در تمرینهای ۱۵ و ۱۶، $D_t|\mathbf{R}(t)|$ را بیابید .

۱۵ . $\mathbf{R}(t) = (t-1)\mathbf{i} + (2-t)\mathbf{j}$

۱۶ . $\mathbf{R}(t) = (e^t+1)\mathbf{i} + (e^t-1)\mathbf{j}$

در تمرینهای ۱۷ تا ۲۰، $\mathbf{R}'(t)\cdot\mathbf{R}''(t)$ را بیابید .

۱۷ . $\mathbf{R}(t) = (2t^2-1)\mathbf{i} + (t^2+3)\mathbf{j}$

۱۸ . $\mathbf{R}(t) = \ln(t-1)\mathbf{i} - 3t^{-1}\mathbf{j}$

۱۹ . $\mathbf{R}(t) = e^{2t}\mathbf{i} + e^{-2t}\mathbf{j}$

۲۰ . $\mathbf{R}(t) = -\cos 2t\,\mathbf{i} + \sin 2t\,\mathbf{j}$

۲۱ . قضیهٔ ۶.۵.۱۶ را ثابت کنید .

۲۲ . قضیهٔ ۸.۵.۱۶ را ثابت کنید .

۲۳ . قضیهٔ ۹.۵.۱۶ را ثابت کنید .

در تمرینهای ۲۴ تا ۲۹، کلیترین برداری‌را بیابید که مشتقش مقدار تابعی داده شده‌باشد .

۲۴ . $(t^2-9)\mathbf{i} + (2t-5)\mathbf{j}$

۲۵ . $\tan t\,\mathbf{i} - \dfrac{1}{t}\mathbf{j}$

۲۶ . $3^t\mathbf{i} - 2^t\mathbf{j}$

۲۷ . $e^{3t}\mathbf{i} + \dfrac{1}{t-1}\mathbf{j}$

۲۸ . $\dfrac{1}{4+t^2}\mathbf{i} - \dfrac{4}{1-t^2}\mathbf{j}$

۲۹ . $\ln t\,\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$

۳۰ . هرگاه $\mathbf{R}'(t) = t^2\mathbf{i} + \dfrac{1}{t-2}\mathbf{j}$ و $\mathbf{R}(3) = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$، $\mathbf{R}(t)$ را بیابید .

۳۱ . هرگاه $\mathbf{R}'(t) = \sin^2 t\,\mathbf{i} + 2\cos^2 t\,\mathbf{j}$ و $\mathbf{R}(\pi) = \mathbf{0}$، $\mathbf{R}(t)$ را بیابید .

۳۲ . هرگاه $\mathbf{R}'(t) = e^t\sin t\,\mathbf{i} + e^t\cos t\,\mathbf{j}$ و $\mathbf{R}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$، $\mathbf{R}(t)$ را بیابید .

در تمرینهای ۳۳ و ۳۴، بهازای معادلهٔ برداری‌داده شده معادلهٔ دکارتی منحنی پیموده شده توسط نقطهٔ انتهایی‌نمایش‌موضعی $\mathbf{R}'(t)$ را بیابید . $\mathbf{R}(t)\cdot\mathbf{R}'(t)$ را پیدا کنید . نتیجه را تعبیر هندسی نمایید .

۳۳ . $\mathbf{R}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}$

۳۴ . $\mathbf{R}(t) = \cosh t\,\mathbf{i} - \sinh t\,\mathbf{j}$

در تمرینهای ۳۵ و ۳۶، اگر $\alpha(t)$ زاویهٔ بین $\mathbf{R}(t)$ و $\mathbf{Q}(t)$ به رادیان باشد، $D_t\alpha(t)$ را

بیابید .

۳۵ . $\mathbf{R}(t) = 3e^{2t}\mathbf{i} - 4e^{2t}\mathbf{j}$ و $\mathbf{Q}(t) = 6e^{3t}\mathbf{j}$.

۳۶ . $\mathbf{R}(t) = 2t\mathbf{i} + (t^2-1)\mathbf{j}$ و $\mathbf{Q}(t) = 3t\mathbf{i}$.

۳۷ . فرض کنید توابع برداری $\mathbf{R}$ و $\mathbf{R}'$ بر بازه‌ای تعریف شده باشند و $\mathbf{R}'$ براین بازه مشتقپذیر باشد . ثابت کنید

$$D_t[\mathbf{R}'(t)\cdot\mathbf{R}(t)] = |\mathbf{R}'(t)|^2 + \mathbf{R}(t)\cdot\mathbf{R}''(t)$$

۳۸ . هرگاه $|\mathbf{R}(t)| = h(t)$، ثابت کنید $\mathbf{R}(t)\cdot\mathbf{R}'(t) = [h(t)][h'(t)]$.

۳۹ . هرگاه تابع برداری $\mathbf{R}$ و تابع حقیقی f هر دو بر بازه‌ای مشتقپذیر بوده و براین بازه $f(t) \neq 0$ ، ثابت کنید $\mathbf{R}/f$ نیز براین بازه مشتقپذیر بوده و

$$D_t\left[\frac{\mathbf{R}(t)}{f(t)}\right] = \frac{f(t)\mathbf{R}'(t) - f'(t)\mathbf{R}(t)}{[f(t)]^2}$$

۴۰ . ثابت کنید هرگاه $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ بردارهای‌ثابتی بوده‌و f و g توابعی انتگرالپذیر باشند، آنگاه

$$\int[\mathbf{A}f(t) + \mathbf{B}g(t)]\,dt = \mathbf{A}\int f(t)\,dt + \mathbf{B}\int g(t)\,dt$$

(**راهنمایی .** $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ را برحسب $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ بیان نمایید .)

۶.۱۶ طول قوس

در بخش ۶.۷ فرمولی برای‌طول قوس یک منحنی به معادلهٔ $y = f(x)$ یافتیم . این‌نوعی خاص از منحنی‌است، زیرا یک‌خط‌قائم نمودارتابع f را در بیش ازیک نقطه قطع نمی‌کند .

حال روشی برای یافتن طول قوس چند نوع دیگر از منحنیها عرضه می‌کنیم . فرض کنیم C یک منحنی به معادلات پارامتری

$$x = f(t) \quad \text{و} \quad y = g(t) \tag{1}$$

بوده و f و g بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ پیوسته باشند . می‌خواهیم عدد L که نمایش طول قوس C از $t = a$ تا $t = b$ است را معین نماییم . مثل بخش ۶.۷ عمل می‌کنیم .

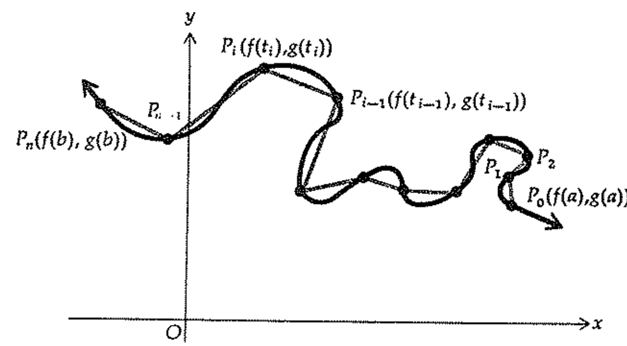
فرض‌کنیم Δ افرازی از بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ باشد که از تقسیم بازه با اختیار $n-1$ عـدد بیـن a و b به n زیربـازه تشکیل مـی‌شود . فـرض‌کنیم $t_0 = a$ و $t_n = b$، و $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ اعداد میانی باشند :

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n$$

زیربازهٔ i م $[t_{i-1}, t_i]$ است و طولش که با $\Delta_i t$ نموده می‌شود مساوی $t_i - t_{i-1}$ است، که درآن $i = 1, 2, \ldots, n$. فرض‌کنیم $\|\Delta\|$ نرم این افراز باشد؛ درنتیجه، به‌ازای هر i، $\Delta_i t \le \|\Delta\|$.

به‌هر عدد t_i نقطهٔ $P_i(f(t_i), g(t_i))$ بر C مربوط می‌شود. از هر نقطهٔ P_{i-1} پاره خطی به‌نقطهٔ بعدی P_i رسم می‌کنیم (ر.ک. شکل ۱۰۶۰۱۶). طول پاره‌خط از P_{i-1} تا P_i با $|\overline{P_{i-1}P_i}|$ نموده می‌شود. از فرمول فاصله داریم

$$|\overline{P_{i-1}P_i}| = \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i) - g(t_{i-1})]^2} \qquad (۲)$$



شکل ۱۰۶۰۱۶

مجموع طولهای n پاره خط مساوی است با

$$\sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1}P_i}| \qquad (۳)$$

درک شهودی ما از طول قوس از $t = a$ تا $t = b$ ما را به تعریف طول قوس به‌عنوان حد مجموع (۳) وقتی $\|\Delta\|$ به صفر نزدیک می‌شود خواهد رسانید.

۱۰۶۰۱۶ تعریف. فرض‌کنیم منحنی C به معادلات پارامتری $x = f(t)$ و $y = g(t)$ باشد. هرگاه عدد L واجد این خاصیت باشد که به‌ازای هر $\epsilon > 0$، $\delta > 0$ ای باشد که به‌ازای هر افراز Δ از بازهٔ $[a, b]$ که $\|\Delta\| < \delta$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1}P_i}| - L\right| < \epsilon$$

می‌نویسیم

$$L = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1}P_i}| \qquad (۴)$$

و L **طول قوس** منحنی C از نقطهٔ $(f(a), g(a))$ تا نقطهٔ $(f(b), g(b))$ نامیده می‌شود.

یک منحنی با طول متناهی است اگر حد (۴) موجود باشد.

هرگاه f' و g' بر $[a, b]$ پیوسته باشند، به‌صورت زیر عمل کرده فرمولی برای محاسبهٔ حد (۴) پیدا نمایید.

چون f' و g' بر $[a, b]$ پیوسته‌اند، بر هر زیربازهٔ افراز Δ پیوسته می‌باشند. درنتیجه، مفروضات قضیهٔ مقدار میانگین (قضیهٔ ۲۰۴۰۴) به‌وسیلهٔ f و g بر هر $[t_{i-1}, t_i]$ برقرارند؛ لذا، اعدادی مانند z_i و w_i در بازهٔ باز (t_{i-1}, t_i) وجود دارند بطوری که

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(z_i)\, \Delta_i t \qquad (۵)$$

و

$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(w_i)\, \Delta_i t \qquad (۶)$$

با گذاردن (۵) و (۶) در (۲)، بدست می‌آوریم

$$|\overline{P_{i-1}P_i}| = \sqrt{[f'(z_i)\, \Delta_i t]^2 + [g'(w_i)\, \Delta_i t]^2}$$

یا، معادلاً،

$$|\overline{P_{i-1}P_i}| = \sqrt{[f'(z_i)]^2 + [g'(w_i)]^2}\, \Delta_i t \qquad (۷)$$

که درآن z_i و w_i در بازهٔ باز (t_{i-1}, t_i) می‌باشند. دراین صورت، از (۴) و (۷)، در صورت وجود حد، داریم

$$L = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f'(z_i)]^2 + [g'(w_i)]^2}\, \Delta_i t \qquad (۸)$$

مجموع (۸) یک مجموع ریمان نیست، زیرا z_i و w_i لزوماً یکی نیستند. درنتیجه، از تعریف انتگرال معین نمی‌توان برای محاسبهٔ حد (۸) استفاده کرد. با اینحال، قضیه‌ای وجود دارد که برای محاسبهٔ این حد قابل اعمال است. این قضیه را بیان می‌کنیم، اما بدلیل اینکه از حوصلهٔ این کتاب خارج است اثبات نمی‌کنیم. برهان آن را می‌توان در یک کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته یافت.

۲۰۶۰۱۶ قضیه. *هرگاه توابع F و G بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ پیوسته باشند، آنگاه تابع $\sqrt{F^2 + G^2}$ نیز بر $[a, b]$ پیوسته می‌باشد، و هرگاه Δ افرازی از بازهٔ $[a, b]$ باشد*

$(\Delta: a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots < t_n = b)$ و z_i و w_i اعدادی در (t_{i-1}, t_i) باشند، آنگاه

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[F(z_i)]^2 + [G(w_i)]^2}\, \Delta_i t = \int_a^b \sqrt{[F(t)]^2 + [G(t)]^2}\, dt \qquad (۹)$$

با اعمال (۹) بر (۸)، که درآن F مساوی f' و G مساوی g' باشد، خواهیم داشت

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

این نتیجه را به‌صورت قضیه بیان می‌کنیم.

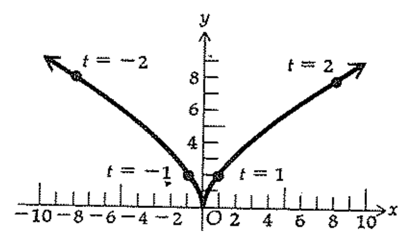
۳۰۶۰۱۶ قضیه. **فرض‌کنیم منحنی C به‌معادلات پارامتری $x = f(t)$ و $y = g(t)$ بوده، و f' و g' بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ پیوسته باشند. دراین صورت، طول قوس L منحنی C از نقطهٔ $(f(a), g(a))$ تا نقطهٔ $(f(b), g(b))$ از رابطهٔ**

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt \qquad (۱۰)$$

بدست می‌آید.

مثال ۱. طول قوس منحنی به معادلات پارامتری $x = t^3$ و $y = 2t^2$ را درهریک از حالات زیر بیابید: (آ) از $t = 0$ تا $t = 1$؛ (ب) از $t = -2$ تا $t = 0$.

حل. این منحنی در شکل ۲۰۶۰۱۶ نموده شده است.



شکل ۲۰۶۰۱۶

(آ) فرض کنیم $x = f(t)$؛ پس $f'(t) = D_t x = 3t^2$. فرض کنیم $y = g(t)$؛ پس $g'(t) = D_t y = 4t$. درنتیجه، طبق قضیهٔ ۳۰۶۰۱۶، اگر L طول قوس منحنی از $t = 0$ تا $t = 1$ باشد،

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{9t^4 + 16t^2}\, dt \\ &= \int_0^1 t\sqrt{9t^2 + 16}\, dt \\ &= \tfrac{1}{18} \cdot \tfrac{2}{3}(9t^2 + 16)^{3/2} \Big]_0^1 \\ &= \tfrac{1}{27}[(25)^{3/2} - (16)^{3/2}] \\ &= \tfrac{1}{27}(125 - 64) \\ &= \tfrac{61}{27} \end{aligned}$$

(ب) هرگاه L طول قوس منحنی از $t = -2$ تا $t = 0$ باشد، از قضیهٔ ۳۰۶۰۱۶ داریم

$$L = \int_{-2}^0 \sqrt{9t^4 + 16t^2}\, dt = \int_{-2}^0 \sqrt{t^2}\, \sqrt{9t^2 + 16}\, dt$$

چون $-2 \le t \le 0$، $\sqrt{t^2} = -t$. بنابراین،

$$\begin{aligned} L &= \int_{-2}^0 -t\sqrt{9t^2 + 16}\, dt \\ &= -\tfrac{1}{27}(9t^2 + 16)^{3/2} \Big]_{-2}^0 \\ &= -\tfrac{1}{27}[(16)^{3/2} - (52)^{3/2}] \\ &= \tfrac{1}{27}(104\sqrt{13} - 64) \\ &\approx 11.5 \end{aligned}$$

منحنی C به معادلات پارامتری (۱) است. فرض‌کنیم s طول قوس C از نقطهٔ $(f(t_0), g(t_0))$ تا نقطهٔ $(f(t), g(t))$ بوده، و s با افزایش t صعود نماید. دراین صورت، s تابعی است از t و از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{[f'(u)]^2 + [g'(u)]^2}\, du \qquad (۱۱)$$

از قضیهٔ ۱۰۶۰۷ داریم

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} \qquad (۱۲)$$

معادلهٔ برداری C عبارت است از

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} \tag{۱۳}$$

چون

$$\mathbf{R}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j}$$

پس

$$|\mathbf{R}'(t)| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} \tag{۱۴}$$

با گذاردن (۱۴) در (۱۲)، خواهیم داشت

$$|\mathbf{R}'(t)| = \frac{ds}{dt} \tag{۱۵}$$

از (۱۵) معلوم می‌شود که اگر s طول قوس منحنی C به معادلهٔ برداری (۱۳) باشد که از نقطهٔ ثابتی تا نقطهٔ $(f(t), g(t))$ که با افزایش t، s صعود می‌کند سنجیده شود، مشتق s نسبت به t اندازهٔ مشتق بردار موضع در نقطهٔ $(f(t), g(t))$ است.

(۱۴) را در (۱۰) گذاشته و بدست می‌آوریم $L = \int_a^b |\mathbf{R}'(t)|\,dt$. درنتیجه، قضیهٔ ۳۰۶۰۱۶ را می‌توان برحسب بردارها به‌صورت زیر بیان کرد.

۴۰۶۰۱۶ قضیه. فرض کنیم منحنی C به معادلهٔ برداری $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ بوده، و f' و g' بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ پیوسته باشند. در این صورت، طول قوس C، که به وسیلهٔ نقطهٔ پایان نمایش موضعی $\mathbf{R}(t)$ وقتی t از a تا b افزایش می‌یابد پیموده می‌شود، عبارت است از

$$L = \int_a^b |\mathbf{R}'(t)|\,dt \tag{۱۶}$$

مثال ۲. طول قوس پیموده شده بوسیلهٔ نقطهٔ انتهایی نمایش موضعی $\mathbf{R}(t)$ وقتی t از 1 تا 4 افزایش می‌یابد و $\mathbf{R}(t) = e^t \sin t\mathbf{i} + e^t \cos t\mathbf{j}$ را بیابید.

حل

$$\mathbf{R}'(t) = (e^t \sin t + e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \cos t - e^t \sin t)\mathbf{j}$$

لذا،

$$|\mathbf{R}'(t)| = e^t\sqrt{\sin^2 t + 2\sin t\cos t + \cos^2 t + \cos^2 t - 2\sin t\cos t + \sin^2 t}$$
$$= e^t\sqrt{2}$$

از (۱۶) داریم

$$L = \int_1^4 \sqrt{2}e^t\,dt = \sqrt{2}e^t\Big]_1^4 = \sqrt{2}(e^4 - e)$$

شکل دیگر فرمول (۱۰) برای طول قوس یک منحنی C به معادلات پارامتری $x = f(t)$ و $y = g(t)$، از تعویض $f'(t)$ با dx/dt و $g'(t)$ با dy/dt بدست می‌آید، که عبارت است از

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \tag{۱۷}$$

حال فرض کنید بخواهیم طول قوس منحنی C به معادلهٔ قطبی $r = F(\theta)$ را بیابیم. اگر (x, y) نمایش دکارتی نقطهٔ P بر C و (r, θ) یک نمایش قطبی P باشد،

$$x = r\cos\theta \quad \text{و} \quad y = r\sin\theta \tag{۱۸}$$

از تعویض r با $F(\theta)$ در معادلات (۱۸) خواهیم داشت

$$x = F(\theta)\cos\theta \quad \text{و} \quad y = F(\theta)\sin\theta \tag{۱۹}$$

معادلات (۱۹) را می‌توان معادلات پارامتری C گرفت، که در آنها θ به‌جای t پارامتر است. لذا، اگر F' بر بازهٔ بستهٔ $[\alpha, \beta]$ پیوسته باشد، فرمول طول قوس منحنی C به معادلهٔ قطبی $r = F(\theta)$ از (۱۷) با اختیار $t = \theta$ بدست می‌آید. درنتیجه،

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta \tag{۲۰}$$

از (۱۸) داریم

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos\theta\frac{dr}{d\theta} - r\sin\theta \quad \text{و} \quad \frac{dy}{d\theta} = \sin\theta\frac{dr}{d\theta} + r\cos\theta$$

بنابراین،

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{\left(\cos\theta\frac{dr}{d\theta} - r\sin\theta\right)^2 + \left(\sin\theta\frac{dr}{d\theta} + r\cos\theta\right)^2}$$
$$= \sqrt{\cos^2\theta\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - 2r\sin\theta\cos\theta\frac{dr}{d\theta} + r^2\sin^2\theta + \sin^2\theta\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + 2r\sin\theta\cos\theta\frac{dr}{d\theta} + r^2\cos^2\theta}$$
$$= \sqrt{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + (\sin^2\theta + \cos^2\theta)r^2}$$

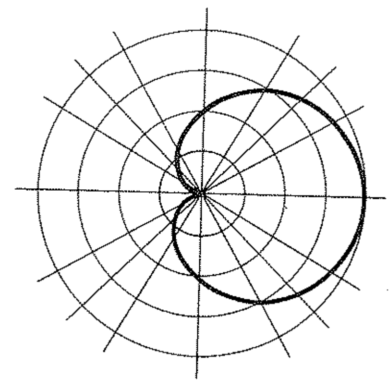
$$= \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}$$

با گذاردن این در (۲۰) بدست می‌آوریم

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\, d\theta \qquad (۲۱)$$

مثال ۳. طول قوس دلگون $r = 2(1 + \cos\theta)$ را بیابید.

حل. منحنی در شکل ۳.۶.۱۶ رسم شده‌است. برای بدست آوردن طول تمام منحنی می‌توان بـه θ مقادیر از 0 تا 2π داد یا از خاصیت تقارن منحنی استفاده کرد و نصف طول را با دادن مقادیر 0 تا π به θ پیدا نمود.



شکل ۳.۶.۱۶

چون $r = 2(1 + \cos\theta)$ ، $dr/d\theta = -2\sin\theta$. باگذاردن در (۲۱)، انتگرالگیری از 0 تا π ، و ضرب در 2 ، خواهیم داشت

$$L = 2\int_0^\pi \sqrt{(-2\sin\theta)^2 + 4(1+\cos\theta)^2}\, d\theta$$

$$= 4\int_0^\pi \sqrt{\sin^2\theta + 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta}\, d\theta$$

$$\doteq 4\sqrt{2}\int_0^\pi \sqrt{1+\cos\theta}\, d\theta$$

برای محاسبهٔ این انتگرال، از اتحاد $\cos^2 \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)$ استفاده می‌کنیم که‌نتیجه‌می‌دهد $\sqrt{1+\cos\theta} = \sqrt{2}\,|\cos\frac{1}{2}\theta|$. چون $0 \le \theta \le \pi$ ، پس $0 \le \frac{1}{2}\theta \le \frac{1}{2}\pi$ ؛ لذا، $\cos\frac{1}{2}\theta \ge 0$. بنابراین، $\sqrt{1+\cos\theta} = \sqrt{2}\cos\frac{1}{2}\theta$. درنتیجه،

$$L = 4\sqrt{2}\int_0^\pi \sqrt{2}\cos\tfrac{1}{2}\theta\, d\theta = 16\sin\tfrac{1}{2}\theta\Big]_0^\pi = 16$$

تمرینات ۶.۱۶

در تمرینهای زیر، طول قوس را بیابید. هرجا a ظاهر شده، $a > 0$.

۱. $x = \frac{1}{2}t^2 + t, y = \frac{1}{2}t^2 - t$ ؛ از $t = 0$ تا $t = 1$.

۲. $x = t^3, y = 3t^2$ ؛ از $t = -2$ تا $t = 0$.

۳. $x = t^2 + 2t, y = t^2 - 2t$ ؛ از $t = 0$ تا $t = 2$.

۴. $\mathbf{R}(t) = (t^2 + 3)\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$ ؛ از $t = 1$ تا $t = 4$.

۵. $\mathbf{R}(t) = 2t^2\mathbf{i} + 2t^3\mathbf{j}$ ؛ از $t = 1$ تا $t = 2$.

۶. $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + \cosh t\,\mathbf{j}$ ؛ از $t = 0$ تا $t = 3$.

۷. $\mathbf{R}(t) = 3e^{2t}\mathbf{i} - 4e^{2t}\mathbf{j}$ ؛ از $t = 0$ تا $t = \ln 5$.

۸. $\mathbf{R}(t) = a(\cos t + t\sin t)\mathbf{i} + a(\sin t - t\cos t)\mathbf{j}$ ؛ از $t = 0$ تا $t = \frac{1}{3}\pi$.

۹. تمام بتوچرخزاد چهاربازگشتی: $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$.

۱۰. $x = e^{-t}\cos t, y = e^{-t}\sin t$ ؛ از $t = 0$ تا $t = \pi$.

۱۱. $x = 4\sin 2t, y = 4\cos 2t$ ؛ از $t = 0$ تا $t = \pi$.

۱۲. یک قوس از چرخزاد: $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$.

۱۳. کشانندهٔ $x = t - a\tanh\frac{t}{a}, y = a\,\mathrm{sech}\frac{t}{a}$ از $t = -a$ تا $t = 2a$.

۱۴. محیط دایره: $\mathbf{R}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j}$.

۱۵. محیط دایره: $r = 5\cos\theta$.

۱۶. محیط دایره: $r = a\sin\theta$.

۱۷. محیط دایره: $r = a$.

۱۸. تمام منحنی: $r = 1 - \sin\theta$.

۱۹. تمام منحنی: $r = 3\cos^2\frac{1}{2}\theta$.

۲۰. $r = a\theta$ ؛ از $\theta = 0$ تا $\theta = 2\pi$.

۲۱. $r = e^{2\theta}$ ؛ از $\theta = 0$ تا $\theta = 4$.

۲۲. $r = a\theta^2$ ؛ از $\theta = 0$ تا $\theta = \pi$.

۲۳. $r = a\sin^3 \frac{1}{3}\theta$ ؛ از $\theta = 0$ تا $\theta = \theta_1$.

۲۴. $r = \sin^2 \frac{1}{2}\theta$ ؛ از $\theta = 0$ تا $\theta = \frac{1}{2}\pi$.

۲۵. هرگاه شعاع لاستیک یک دوچرخه 40 cm باشد، مسافتی که یک پونز در لاستیک طی می‌کند وقتی دوچرخه مسافت 50π m طی نماید را بیابید.
(**راهنمایی.** مسیر پونز یک چرخزاد است.)

۷.۱۶ حرکت مسطح

بحث قبلی ما از حرکت یک ذره به‌حرکت مستقیم‌الخط محدود شده بود. در این باب سرعت و شتاب یک ذرهٔ متحرک در امتداد یک خط مستقیم تعریف شدند. حال حرکت یک ذره در امتداد یک منحنی در صفحه را درنظر می‌گیریم.

فرض‌کنیم C یک منحنی مسطح به معادلات پارامتری $x = f(t), y = g(t)$ باشد، که در آنها t مبین زمان است. دراین صورت،

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$$

یک معادلهٔ برداری C است. با تغییر t نقطهٔ انتهایی $\overrightarrow{OP}$ از $P(f(t), g(t))$ درامتداد منحنی C حرکت می‌کند. موضع ذرهٔ متحرک در امتداد C نقطهٔ $P(f(t), g(t))$ است. **بردار سرعت** ذره در لحظهٔ t مساوی $\mathbf{R}'(t)$ تعریف و با علامت $\mathbf{V}(t)$ نموده می‌شود.

۱.۷.۱۶ تعریف. فرض‌کنیم C منحنی به معادلات پارامتری $x = f(t)$ و $y = g(t)$ باشد. اگر ذره‌ای درامتداد C طوری حرکت کند که موضعش در لحظهٔ t نقطهٔ (x, y) باشد، **سرعت لحظه‌ای** ذره در لحظهٔ t با بردار سرعت

$$\mathbf{V}(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j}$$

در صورت وجود $f'(t)$ و $g'(t)$، معین می‌شود.

در بخش ۵.۱۶ دیدیم که جهت $\mathbf{R}'(t)$ در نقطهٔ $P(f(t), g(t))$ در امتداد خط مماس‌برمنحنی C در P است. بنابراین، بردار سرعت $\mathbf{V}(t)$ این جهت را در P خواهد داشت.

اندازهٔ بردار سرعت **مقدار سرعت** ذره در لحظهٔ t است و مساوی است با

$$|\mathbf{V}(t)| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} \qquad (1)$$

توجه کنید که سرعت بردار است و مقدار سرعت اسکالر. همانطور که در بخش ۶.۱۶ نشان دادیم، عبارت طرف راست (۱) مساوی ds/dt است. درنتیجه، مقدار سرعت میزان تغییر s نسبت به t است، و می‌نویسیم

$$|\mathbf{V}(t)| = \frac{ds}{dt} \qquad (2)$$

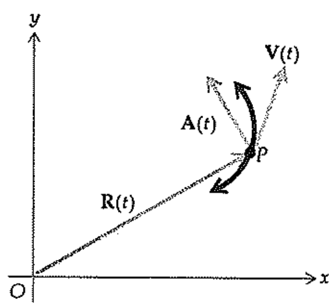
بردار شتاب ذره درلحظهٔ t با $\mathbf{A}(t)$ نموده شده و مساوی مشتق بردار سرعت یا، معادلاً، مشتق دوم بردار موضع تعریف می‌شود.

۲.۷.۱۶ تعریف. *شتاب لحظه‌ای* یک ذرهٔ متحرک در امتداد منحنی C به معادلات پارامتری $x = f(t)$ و $y = g(t)$ در لحظهٔ t با بردار شتاب

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{V}'(t) = \mathbf{R}''(t)$$

معین می‌شود، که در آن $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ و $\mathbf{R}''(t)$ وجود دارد.

شکل ۱.۷.۱۶ نمایشهای بردار سرعت و بردار شتابی را نشان می‌دهد که نقطهٔ شروع آن P بر C است.



شکل ۱.۷.۱۶

مثال ۱. ذره‌ای درامتداد منحنی به معادلات پارامتری $x = 4\cos\frac{1}{2}t$ و $y = 4\sin\frac{1}{2}t$ در حرکت است. اگر t زمان به ثانیه بوده و x و y به سانتیمتر باشند، مقدار سرعت واندازهٔ بردار شتاب ذره در لحظهٔ t sec را پیدا کنید. مسیر ذره، و نیز نمایشهای

بردار سرعت و شتاب با نقطهٔ شروعی که درآن $t = \frac{1}{3}\pi$ را رسم نمایید.

حل. معادلهٔ برداری C عبارت است از

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}(t) &= 4\cos\tfrac{1}{2}t\mathbf{i} + 4\sin\tfrac{1}{2}t\mathbf{j}\\
\mathbf{V}(t) &= \mathbf{R}'(t) = -2\sin\tfrac{1}{2}t\mathbf{i} + 2\cos\tfrac{1}{2}t\mathbf{j}\\
\mathbf{A}(t) &= \mathbf{V}'(t) = -\cos\tfrac{1}{2}t\mathbf{i} - \sin\tfrac{1}{2}t\mathbf{j}\\
|\mathbf{V}(t)| &= \sqrt{(-2\sin\tfrac{1}{2}t)^2 + (2\cos\tfrac{1}{2}t)^2}\\
&= \sqrt{4\sin^2\tfrac{1}{2}t + 4\cos^2\tfrac{1}{2}t}\\
&= 2\\
|\mathbf{A}(t)| &= \sqrt{(-\cos\tfrac{1}{2}t)^2 + (-\sin\tfrac{1}{2}t)^2} = 1
\end{aligned}$$

بنابراین، مقدار سرعت ذره ثابت و مساوی 2 cm/sec است. اندازهٔ بردار شتاب نیز ثابت و مساوی 1 cm/sec^2 می‌باشد.

از حذف t بین معادلات پارامتری C معادلهٔ دکارتی $x^2 + y^2 = 16$ بدست می‌آید، که دایره‌ای است به مرکز O و شعاع 4.

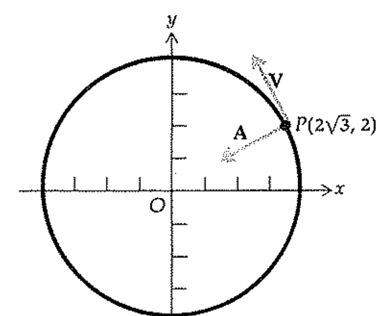
وقتی $t = \frac{1}{3}\pi$، جهت $\mathbf{V}(t)$ با $\frac{1}{2}\pi < \theta < \pi$ داده می‌شود و

$$\tan\theta = -\frac{\cos\frac{1}{6}\pi}{\sin\frac{1}{6}\pi} = -\cot\tfrac{1}{6}\pi = -\sqrt{3}$$

وقتی $t = \frac{1}{3}\pi$، جهت $\mathbf{A}(t)$ با $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ داده می‌شود و

$$\tan\theta = \frac{\sin\frac{1}{6}\pi}{\cos\frac{1}{6}\pi} = \tan\tfrac{1}{6}\pi = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

شکل ۲۰۷۰۱۶ نمایشهای بردار سرعت و شتاب را با نقطهٔ شروعی که درآن $t = \frac{1}{3}\pi$ نشان می‌دهد.



شکل ۲۰۷۰۱۶

مثال ۲. موضع یک‌ذرهٔ متحرک در لحظهٔ t از معادلهٔ برداری $\mathbf{R}(t) = e^{-2t}\mathbf{i} + 3e^{t}\mathbf{j}$ بدست می‌آید. $\mathbf{V}(t)$ ، $\mathbf{A}(t)$ ، $|\mathbf{V}(t)|$ ، و $|\mathbf{A}(t)|$ را پیدا کنید. مسیر ذره و نمایشهای بردار سرعت و شتاب با نقطهٔ شروعی که درآن $t = \frac{1}{2}$ را رسم نمایید.

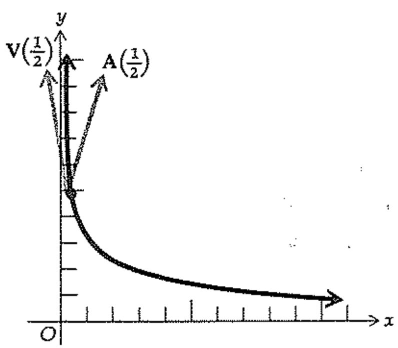
حل

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(t) &= \mathbf{R}'(t) = -2e^{-2t}\mathbf{i} + 3e^{t}\mathbf{j}\\
\mathbf{A}(t) &= \mathbf{V}'(t) = 4e^{-2t}\mathbf{i} + 3e^{t}\mathbf{j}\\
|\mathbf{V}(t)| &= \sqrt{4e^{-4t} + 9e^{2t}}\\
|\mathbf{A}(t)| &= \sqrt{16e^{-4t} + 9e^{2t}}\\
|\mathbf{V}(\tfrac{1}{2})| &= \sqrt{4e^{-2} + 9e} \approx 5.00\\
|\mathbf{A}(\tfrac{1}{2})| &= \sqrt{16e^{-2} + 9e} \approx 5.16
\end{aligned}$$

معادلات پارامتری مسیر ذره عبارتند از $x = e^{-2t}$ و $y = 3e^{t}$. از حذف t بین این دو معادله بدست می‌آوریم

$$xy^2 = 9$$

چون $x > 0$ و $y > 0$ ، مسیر ذره بخشی از منحنی $xy^2 = 9$ است که در ربع اول قرار دارد. شکل ۳۰۷۰۱۶ مسیر ذره و بردارهای سرعت و شتاب را وقتی $t = \frac{1}{2}$ نشان می‌دهد. شیب $\mathbf{V}(\frac{1}{2})$ مساوی $-\frac{3}{2}e^{3/2} \approx -6.7$ است، و شیب $\mathbf{A}(\frac{1}{2})$ مساوی $\frac{3}{4}e^{3/2} \approx 3.4$.



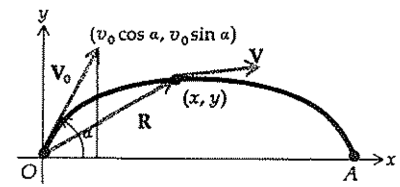
شکل ۳۰۷۰۱۶

حال معادلات حرکت یک گلوله را با این‌فرض که در یک صفحهٔ قائم حرکت می‌کند بدست می‌آوریم. همچنین، فرض می‌کنیم تنها نیروی وارد بر گلوله وزنش باشد، که در جهت پایین و به‌اندازهٔ mg lb است، که درآن m وزن آن به اسلاگ بوده و g ft/sec^2

شتاب ثابت ناشی از جاذبه است. از نیروی مقاومت هوا (که در سرعتهای کم براجسام سنگین اثر قابل‌ملاحظه‌ای ندارد) صرف‌نظر می‌کنیم. جهت مثبت را قائم و روبه‌بالا و افقی به‌سمت راست می‌گیریم.

پس فرض می‌کنیم گلوله‌ای از یک توپ که زاویهٔ ارتفاع آن α رادیان است شلیک شده باشد. همچنین، سرعت اولیه، یا **سرعت فرار**، آن را با v_0 نشان می‌دهیم. محورهای مختصات را طوری می‌گیریم که توپ در مبداء باشد. به‌شکل ۴۰۷۰۱۶ رجوع کنید. بردار سرعت اولیهٔ $\mathbf{V}_0$ گلوله عبارت است از

$$\mathbf{V}_0 = v_0\cos\alpha\mathbf{i} + v_0\sin\alpha\mathbf{j} \qquad \text{(۳)}$$



شکل ۴۰۷۰۱۶

فرض کنیم t sec زمان پس از شلیک توپ، x ft فاصلهٔ افقی گلوله از نقطهٔ شروع در t sec، و y ft فاصلهٔ قائم گلوله از نقطهٔ شروع در t sec باشد. $\mathbf{R}(t)$ بردار موضع گلوله در t sec، $\mathbf{V}(t)$ بردار سرعت گلوله در t sec، و $\mathbf{A}(t)$ بردار شتاب گلوله در t sec باشد.

چون x تابعی از t است، می‌نویسیم $x(t)$. بهمین نحو، y تابعی از t بوده و می‌نویسیم $y(t)$. دراین صورت،

$$\mathbf{R}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \qquad \text{(۴)}$$

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{R}'(t) \qquad \text{(۵)}$$

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{V}'(t) \qquad \text{(۶)}$$

چون تنها نیروی وارد بر گلوله دارای اندازهٔ mg lb بوده و درجهت پایین است، اگر $\mathbf{F}$ این نیرو باشد،

$$\mathbf{F} = -mg\mathbf{j} \qquad \text{(۷)}$$

قانون دوم حرکت نیوتن می‌گوید که نیروی کل وارد بر یک جسم مساوی "جرم ضربدر شتاب" است. درنتیجه،

$$\mathbf{F} = m\mathbf{A} \qquad \text{(۸)}$$

از (۷) و (۸) داریم

$$m\mathbf{A} = -mg\mathbf{j}$$

$$\mathbf{A} = -g\mathbf{j} \qquad \text{(۹)}$$

چون $\mathbf{A}(t) = \mathbf{V}'(t)$، از (۹) داریم

$$\mathbf{V}'(t) = -g\mathbf{j} \qquad \text{(۱۰)}$$

با مشتقگیری از طرفین (۱۰) نسبت به t، بدست می‌آید

$$\mathbf{V}(t) = -gt\mathbf{j} + \mathbf{C}_1 \qquad \text{(۱۱)}$$

که درآن $\mathbf{C}_1$ بردار ثابت انتگرالگیری است.

وقتی $t = 0$، $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0$. درنتیجه، $\mathbf{C}_1 = \mathbf{V}_0$. لذا، از (۱۱) داریم

$$\mathbf{V}(t) = -gt\mathbf{j} + \mathbf{V}_0$$

یا، بخاطر $\mathbf{V}(t) = \mathbf{R}'(t)$،

$$\mathbf{R}'(t) = -gt\mathbf{j} + \mathbf{V}_0 \qquad \text{(۱۲)}$$

با انتگرالگیری از طرفین معادلهٔ برداری (۱۲) نسبت به t، بدست می‌آوریم

$$\mathbf{R}(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + \mathbf{V}_0 t + \mathbf{C}_2$$

که درآن $\mathbf{C}_2$ بردار ثابت انتگرالگیری است.

وقتی $t = 0$، $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ زیرا گلوله در آغاز در مبداء است. درنتیجه، $\mathbf{C}_2 = \mathbf{0}$. بنابراین،

$$\mathbf{R}(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + \mathbf{V}_0 t \qquad \text{(۱۳)}$$

با گذاردن مقدار $\mathbf{V}_0$ از (۳) در (۱۳) بدست می‌آوریم

$$\mathbf{R}(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + (v_0\cos\alpha\mathbf{i} + v_0\sin\alpha\mathbf{j})t$$

$$\mathbf{R}(t) = tv_0\cos\alpha\mathbf{i} + (tv_0\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2)\mathbf{j} \qquad \text{(۱۴)}$$

معادلهٔ (۱۴) بردارموضع گلوله را در لحظهٔ t sec بدست می‌دهد. از این‌معادله می‌توان حرکت گلوله را مورد بحث قرار داد. ما معمولاً به سوالات زیر توجه داریم:

۱. برد گلوله چقدر است؟ برد فاصلهٔ $|\overline{OA}|$ در امتداد محور x است (ر.ک. شکل ۴۰۷۰۱۶).

۲. زمان کل حرکت، یعنی زمانی که گلوله از O تا A می‌رود، چقدر است؟

۳. ارتفاع ماکزیمم گلوله چقدر است؟

۴. معادلهٔ دکارتی مسیر گلوله چیست؟

۵. بردار سرعت گلوله در لحظهٔ برخورد با زمین چیست؟

این سوالات درمثال زیر پاسخ یافته‌اند.

مثال ۳. گلوله‌ای از یک توپ با زاویهٔ ارتفاع $\frac{1}{6}\pi$ رادیان شلیک شده است. سرعت فرار 480 ft/sec است. (آ) بردار موضع گلوله در هر لحظه؛ (ب) زمان پرواز؛ (پ) برد؛ (ت) ارتفاع ماکزیمم؛ (ث) بردار سرعت گلوله در لحظهٔ برخورد با زمین؛ (ج) بردار موضع و بردار سرعت در 2 sec؛ (چ) مقدار سرعت در 2 sec؛ (ح) معادلهٔ دکارتی مسیر گلوله را بیابید.

حل. $v_0 = 480$ و $\alpha = \frac{1}{6}\pi$. درنتیجه،

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_0 &= 480\cos\tfrac{1}{6}\pi\mathbf{i} + 480\sin\tfrac{1}{6}\pi\mathbf{j}\\ &= 240\sqrt{3}\mathbf{i} + 240\mathbf{j}\end{aligned}$$

(آ) بردار موضع در t sec با معادلهٔ (۱۴) داده شده است، که در این حالت عبارت است از

$$\mathbf{R}(t) = 240\sqrt{3}t\mathbf{i} + (240t - \tfrac{1}{2}gt^2)\mathbf{j} \tag{۱۵}$$

درنتیجه، اگر (x, y) موضع گلوله در t sec باشد، $x = 240\sqrt{3}t$ و $y = 240t - \frac{1}{2}gt^2$.

(ب) برای یافتن زمان پرواز، t را وقتی $y = 0$ معین می‌کنیم. درقسمت (آ)، اگر $y = 0$،

$$\begin{aligned}240t - \tfrac{1}{2}gt^2 &= 0\\ t(240 - \tfrac{1}{2}gt) &= 0\\ t = \frac{480}{g} \quad \text{و} \quad t &= 0\end{aligned}$$

$t = 0$ وقتی است که گلوله شلیک شده است، زیرا در این صورت $y = 0$. اگر $g = 32$، زمان پرواز با $t = 480/g = 480/32 = 15$ معین می‌شود. درنتیجه، زمان پرواز 15 sec است.

(پ) برای یافتن برد، x را وقتی $t = 15$ معین می‌کنیم. از قسمت (آ) داریم $x = 240\sqrt{3}t$. درنتیجه، وقتی $t = 15$، $x = 3600\sqrt{3}$. لذا، برد (تقریباً) 6235 ft است.

(ت) ارتفاع ماکزیمم وقتی بدست می‌آید که $D_t y = 0$؛ یعنی، وقتی مولفهٔ قائم بردار سرعت 0 است. چون

$$\begin{aligned}y &= 240t - \tfrac{1}{2}gt^2\\ D_t y &= 240 - gt\end{aligned}$$

درنتیجه، وقتی $t = 240/g$، $D_t y = 0$. اگر $g = 32$، ارتفاع ماکزیمم وقتی بدست می‌آید که $t = 7\frac{1}{2}$، که نصف زمان کل پرواز می‌باشد. وقتی $t = 7\frac{1}{2}$، $y = 900$. درنتیجه،

ارتفاع ماکزیمم 900 ft است.

(ث) چون زمان پرواز 15 sec است، بردار سرعت در لحظهٔ برخورد با زمین $\mathbf{V}(15)$ می‌باشد. $\mathbf{V}(t)$ را با استفاده از (۱۵) پیدا می‌کنیم، داریم

$$\mathbf{V}(t) = D_t\mathbf{R}(t) = 240\sqrt{3}\mathbf{i} + (240 - gt)\mathbf{j}$$

اگر $g = 32$،

$$\mathbf{V}(15) = 240\sqrt{3}\mathbf{i} - 240\mathbf{j}$$

(ج) اگر در معادلهٔ (۱۵) $t = 2$،

$$\mathbf{R}(2) = 480\sqrt{3}\mathbf{i} + 416\mathbf{j}$$

چون $\mathbf{V}(t) = \mathbf{R}'(t)$،

$$\mathbf{V}(t) = 240\sqrt{3}\mathbf{i} + (240 - gt)\mathbf{j}$$

درنتیجه،

$$\mathbf{V}(2) = 240\sqrt{3}\mathbf{i} + 176\mathbf{j}$$

(چ) مقدار سرعت وقتی $t = 2$ عبارت است از

$$\begin{aligned}|\mathbf{V}(2)| &= \sqrt{(240\sqrt{3})^2 + (176)^2}\\ &= 32\sqrt{199}\end{aligned}$$

درنتیجه، مقدار سرعت در 2 sec تقریباً 451.4 ft/sec است.

(ح) برای یافتن معادلهٔ دکارتی، t را بین معادلات پارامتری

$$\begin{aligned}x &= 240\sqrt{3}t\\ y &= 240t - \tfrac{1}{2}gt^2\end{aligned}$$

حذف می‌کنیم.

با حل معادلهٔ اول نسبت به t و گذاردن آن در معادلهٔ دوم، بدست می‌آوریم

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{10{,}800}x^2$$

که معادلهٔ یک سهمی است.

تمرینات ۷.۱۶

در تمرینهای ۱ تا ۸، ذره‌ای در امتداد یک منحنی به معادلات پارامتری داده شده، که در آنها t sec زمان است، حرکت می‌کند. (آ) بردار سرعت $\mathbf{V}(t)$؛ (ب) بردار شتاب $\mathbf{A}(t)$؛ (پ) مقدار سرعت در $t = t_1$؛ (ت) اندازهٔ بردار شتاب در $t = t_1$

را بیابید. مسیر ذره و نمایشهای بردار سرعت و بردار شتاب در $t = t_1$ را رسم نمایید.

۱. $x = t^2 + 4, y = t - 2; t_1 = 3$

۲. $x = \ln(t - 2), y = t^3 - 1; t_1 = 3$

۳. $x = 5\cos 2t, y = 3\sin 2t; t_1 = \frac{1}{4}\pi$

۴. $x = 2/t, y = -\frac{1}{4}t; t_1 = 4$

۵. $x = t, y = \ln \sec t; t_1 = \frac{1}{4}\pi$

۶. $x = 2\cos t, y = 3\sin t; t_1 = \frac{1}{3}\pi$

۷. $x = \sin t, y = \tan t; t_1 = \frac{1}{6}\pi$

۸. $x = e^{2t}, y = e^{3t}; t_1 = 0$

در تمرینهای ۹ تا ۱۶، موضع یک ذرهٔ متحرک در t sec را از معادلهٔ برداری داده شده بیابید. (آ) $\mathbf{V}(t_1)$ ؛ (ب) $\mathbf{A}(t_1)$ ؛ (پ) $|\mathbf{V}(t_1)|$ ؛ (ت) $|\mathbf{A}(t_1)|$ را بیابید. بخشی از مسیر ذره شامل موضع آن در $t = t_1$ را رسم کنید، و نمایشهای $\mathbf{V}(t_1)$ و $\mathbf{A}(t_1)$ با نقطهٔ شروعی که در آن $t = t_1$ را رسم نمایید.

۹. $\mathbf{R}(t) = (2t - 1)\mathbf{i} + (t^2 + 1)\mathbf{j}; t_1 = 3$

۱۰. $\mathbf{R}(t) = (1 - t)\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j}; t_1 = -1$

۱۱. $\mathbf{R}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j}; t_1 = \ln 2$

۱۲. $\mathbf{R}(t) = (t^2 + 3t)\mathbf{i} + (1 - 3t^2)\mathbf{j}; t_1 = \frac{1}{2}$

۱۳. $\mathbf{R}(t) = \cos 2t\mathbf{i} - 3\sin t\mathbf{j}; t_1 = \pi$

۱۴. $\mathbf{R}(t) = e^{-t}\mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j}; t_1 = \ln 2$

۱۵. $\mathbf{R}(t) = 2(1 - \cos t)\mathbf{i} + 2(1 - \sin t)\mathbf{j}; t_1 = \frac{5}{6}\pi$

۱۶. $\mathbf{R}(t) = \ln(t + 2)\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^2\mathbf{j}; t_1 = 1$

در تمرینهای ۱۷ تا ۲۰، بردار موضع $\mathbf{R}(t)$ را بیابید.

۱۷. $\mathbf{V}(t) = \dfrac{1}{(t - 1)^2}\mathbf{i} - (t + 1)\mathbf{j}$ و $\mathbf{R}(0) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

۱۸. $\mathbf{V}(t) = (2t - 1)\mathbf{i} + 3t^{-2}\mathbf{j}$ و $\mathbf{R}(1) = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

۱۹. $\mathbf{A}(t) = e^{-t}\mathbf{i} + 2e^{2t}\mathbf{j}$ ، $\mathbf{V}(0) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ ، و $\mathbf{R}(0) = 3\mathbf{j}$ ،

۲۰. $\mathbf{A}(t) = 2\cos 2t\mathbf{i} + 2\sin 2t\mathbf{j}$ ، $\mathbf{V}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ ، و $\mathbf{R}(0) = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}$.

۲۱. گلوله‌ای از یک توپ با زاویهٔ ارتفاع 45° و سرعت فرار 2500 ft/sec شلیک شده است. (آ) بردگلوله؛ (ب) ارتفاع ماکزیمم؛ (پ) سرعت برخورد با زمین را بیابید.

۲۲. گلوله‌ای از یک توپ با زاویهٔ ارتفاع 60° شلیک شده است. سرعت فرار 160 ft/sec است. (آ) بردار موضعی گلوله در t sec ؛ (ب) زمان پرواز؛ (پ) برد؛ (ت) ارتفاع ماکزیمم؛ (ث) سرعت در برخورد با زمین؛ (ج) مقدارسرعت در 4 sec را بیابید.

۲۳. گلوله‌ای در بالای یک ساختمان به ارتفاع 96 ft از یک توپ به‌زاویهٔ 30° با افق شلیک شده است. اگرسرعت فرار 600 ft/sec باشد، زمان پروازو فاصله از کف ساختمان تا نقطهٔ برخورد گلوله با زمین را بیابید.

۲۴. سرعت فرار یک توپ 160 ft/sec است. توپ با چه زاویهٔ ارتفاعی باید شلیک کند تا گلوله به شیئی همسطح توپ و در فاصلهٔ 400 ft از آن برخورد نماید.

۲۵. سرعت فرار یک توپ را درصورتی بیابید که گلولهٔ شلیک شده از آن 2000 ft برد داشته و به‌ارتفاع ماکزیمم 1000 ft برسد.

۲۶. کودکی یک توپ‌را به‌طور افقی از بالای یک صخره به ارتفاع 256 ft و با سرعت‌اولیهٔ 50 ft/sec پرتاب می‌کند. زمان پرواز توپ و فاصلهٔ پای صخره تا نقطهٔ برخوردتوپ بازمین را بیابید.

۲۷. کودکی یک توپ را با سرعت اولیهٔ 60 ft/sec بازاویهٔ ارتفاع 60° به سمت یک ساختمان که در فاصلهٔ 25 ft از آن است پرتاب می‌کند. اگر دست کودک درفاصلهٔ 5 ft باشد، نشان دهید که توپ به ساختمان می‌خورد، و جهت توپ را وقتی‌به ساختمان می‌خورد پیدا کنید.

۸.۱۶ بردارهای یکهٔ مماس و قائم و طول قوس به‌عنوان پارامتر

یک بردار یکه برداری است که اندازه‌اش 1 است، مانند دو بردار $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$. حال به هر نقطه از یک منحنی دو بردار یکه مربوط می‌کنیم، که عبارتند از ***بردار یکهٔ مماس*** و ***بردار یکهٔ قائم***.

۱.۸.۱۶ تعریف. هرگاه $\mathbf{R}(t)$ بردار موضع منحنی C در نقطهٔ P بر C باشد، آنگاه ***بردار یکهٔ مماس*** C در P، که با $\mathbf{T}(t)$ نموده می‌شود، بردار یکه در جهت $D_t\mathbf{R}(t)$ است اگر $D_t\mathbf{R}(t) \neq 0$.

بردار یکه درجهت $D_t\mathbf{R}(t)$ با $D_t\mathbf{R}(t)/|D_t\mathbf{R}(t)|$ داده می‌شود؛ لذا،

$$\mathbf{T}(t) = \frac{D_t\mathbf{R}(t)}{|D_t\mathbf{R}(t)|} \qquad (1)$$

چون $\mathbf{T}(t)$ یک بردار یکه است، از قضیهٔ ۱۱.۵.۱۶ معلوم می‌شود که $D_t\mathbf{T}(t)$ باید بر $\mathbf{T}(t)$ عمود باشد. $D_t\mathbf{T}(t)$ لزوماً" بردار یکه نیست. اما بردار $D_t\mathbf{T}(t)/|D_t\mathbf{T}(t)|$ اندازهٔ واحد داشته و با $D_t\mathbf{T}(t)$ همجهت است. لذا، $D_t\mathbf{T}(t)/|D_t\mathbf{T}(t)|$ بردار یکه‌ای است که بر $\mathbf{T}(t)$ عمود است، و آن را ***بردار یکهٔ قائم*** می‌نامند.

۲.۸.۱۶ تعریف. هرگاه $\mathbf{T}(t)$ بردار یکهٔ مماس منحنی C در نقطهٔ P بر C باشد، آنگاه ***بردار یکهٔ قائم***، که با $\mathbf{N}(t)$ نموده می‌شود، بردار یکه درجهت $D_t\mathbf{T}(t)$ است.

از تعریف ۲۰۸۰۱۶ و بحث قبل داریم

(۲) $$\mathbf{N}(t) = \frac{D_t\mathbf{T}(t)}{|D_t\mathbf{T}(t)|}$$

مثال ۱. منحنی بـه معـادلات پارامتری $x = t^3 - 3t$ و $y = 3t^2$ مفروض است. $\mathbf{T}(t)$ و $\mathbf{N}(t)$ را بیابید. بخشی از منحنی را در $t = 2$ رسم کنید و نمایشهای $\mathbf{T}(2)$ و $\mathbf{N}(2)$ که نقطهٔ شروعشان در $t = 2$ است را رسم نمایید.

حل. معادلهٔ برداری منحنی عبارت است از

$$\mathbf{R}(t) = (t^3 - 3t)\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$$

درنتیجه ،

$$D_t\mathbf{R}(t) = (3t^2 - 3)\mathbf{i} + 6t\mathbf{j}$$

دراین صورت ،

$$|D_t\mathbf{R}(t)| = \sqrt{(3t^2 - 3)^2 + 36t^2} = \sqrt{9(t^4 + 2t^2 + 1)} = 3(t^2 + 1)$$

از (۱) داریم

$$\mathbf{T}(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\mathbf{i} + \frac{2t}{t^2 + 1}\mathbf{j}$$

با مشتقگیری از $\mathbf{T}(t)$ نسبت به t ، خواهیم داشت

$$D_t\mathbf{T}(t) = \frac{4t}{(t^2 + 1)^2}\mathbf{i} + \frac{2 - 2t^2}{(t^2 + 1)^2}\mathbf{j}$$

بنابراین ،

$$|D_t\mathbf{T}(t)| = \sqrt{\frac{16t^2}{(t^2 + 1)^4} + \frac{4 - 8t^2 + 4t^4}{(t^2 + 1)^4}}$$
$$= \sqrt{\frac{4 + 8t^2 + 4t^4}{(t^2 + 1)^4}}$$
$$= \sqrt{\frac{4(t^2 + 1)^2}{(t^2 + 1)^4}}$$
$$= \frac{2}{t^2 + 1}$$

از (۲) داریم

$$\mathbf{N}(t) = \frac{2t}{t^2 + 1}\mathbf{i} + \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}\mathbf{j}$$

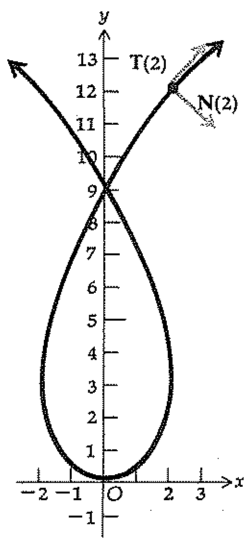
$\mathbf{R}(t)$ ، $\mathbf{T}(t)$ ، و $\mathbf{N}(t)$ را وقتی $t = 2$ می‌یابیم .

$$\mathbf{R}(2) = 2\mathbf{i} + 12\mathbf{j} \qquad \mathbf{T}(2) = \tfrac{3}{5}\mathbf{i} + \tfrac{4}{5}\mathbf{j} \qquad \mathbf{N}(2) = \tfrac{4}{5}\mathbf{i} - \tfrac{3}{5}\mathbf{j}$$

منحنی مطلوب در شکل ۱۰۸۰۱۶ نموده شده است .

از (۱) داریم

(۳) $$D_t\mathbf{R}(t) = |D_t\mathbf{R}(t)|\mathbf{T}(t)$$



شکل ۱۰۸۰۱۶

طرف راست (۳) حاصلضرب یک اسکالر و یک بردار است . برای مشتقگیری از این حاصل ضرب ، قضیهٔ ۸۰۵۰۱۶ را بکار می‌بریم .

(۴) $$D_t^2\mathbf{R}(t) = [D_t|D_t\mathbf{R}(t)|]\mathbf{T}(t) + |D_t\mathbf{R}(t)|[D_t\mathbf{T}(t)]$$

از (۲) داریم

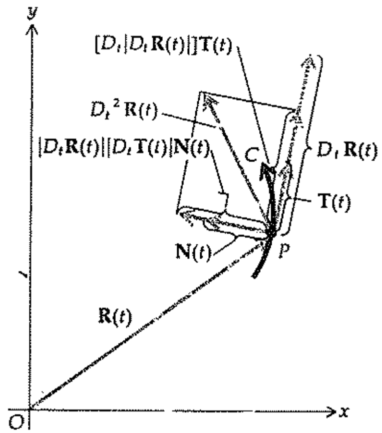
(۵) $$D_t\mathbf{T}(t) = |D_t\mathbf{T}(t)|\mathbf{N}(t)$$

با گذاردن (۵) در (۴) بدست می‌آوریم

(۶) $$D_t^2\mathbf{R}(t) = [D_t|D_t\mathbf{R}(t)|]\mathbf{T}(t) + |D_t\mathbf{R}(t)||D_t\mathbf{T}(t)|\mathbf{N}(t)$$

معادلهٔ (۳) بردار $D_t\mathbf{R}(t)$ را به‌صورت حاصلضرب یک اسکالر در بردار یکهٔ مماس

بیان می‌کند، و (۶) بردار $D_t^2\mathbf{R}(t)$ را به‌صورت حاصل‌ضرب یک اسکالر در بردار یکهٔ مماس بعلاوهٔ حاصل ضرب یک اسکالر در بردار یکهٔ قائم بیان می‌کند. ضریب $\mathbf{T}(t)$ در طرف راست (۶) مولفهٔ بردار $D_t^2\mathbf{R}(t)$ در جهت بردار یکهٔ مماس است. ضریب $\mathbf{N}(t)$ درطرف راست (۶) مولفهٔ $D_t^2\mathbf{R}(t)$ در جهت بردار یکهٔ قائم است. شکل ۲.۸.۱۶ منحنی C با



شکل ۲.۸.۱۶

نمایش‌موضعی $\mathbf{R}(t)$ ونمایشهای $\mathbf{T}(t)$، $\mathbf{N}(t)$، $D_t\mathbf{R}(t)$، $D_t^2\mathbf{R}(t)$، $[D_t|D_t\mathbf{R}(t)|]\mathbf{T}(t)$، و $|D_t\mathbf{R}(t)||D_t\mathbf{T}(t)|\mathbf{N}(t)$، که همهٔ نقاط شروع آنها در نقطهٔ P بر C اند، را نشان می‌دهد. توجه کنید که نمایش بردار یکهٔ قائم $\mathbf{N}$ در طرف تقعر منحنی است. این امر در حالت کلی در بخش ۹.۱۶ ثابت شده است.

کاهی به‌جای پارامتر t می‌خواهیم پارامتر ما طول قوس s از نقطهٔ بدلخواه اختیار شدهٔ $P_0(x_0, y_0)$ بر منحنی C تا نقطهٔ $P(x, y)$ بر C باشد. فرض‌کنیم s با افزایش t افزایش یابد بطوری که s در صورتی که طول قوس در جهت افزایش t سنجیده شود مثبت و درجهت خلاف آن منفی باشد. لذا، s یک فاصلهٔ جهتدار است. همچنین، $D_ts > 0$. به هر s نقطهٔ منحصر بفردی مانند p بر منحنی C نظیر است. درنتیجه، مختصات P توابعی از s اند، و s تابعی است از t. در بخش ۶.۱۶ نشان دادیم که

$$|D_t\mathbf{R}(t)| = D_ts \qquad (۷)$$

با گذاردن (۷) در (۱)، بدست می‌آوریم

$$\mathbf{T}(t) = \frac{D_t\mathbf{R}(t)}{D_ts}$$
$$D_t\mathbf{R}(t) = D_ts\mathbf{T}(t)$$

اگر پارامتر به‌جای t، s باشد، از معادلهٔ فوق با فرض $s = t$ و توجه به اینکه $D_ss = 1$ خواهیم داشت

$$D_s\mathbf{R}(s) = \mathbf{T}(s)$$

این نتیجه را به‌صورت قضیه بیان می‌کنیم.

۳.۸.۱۶ قضیه. *هرگاه معادلهٔ برداری منحنی C عبارت باشد از $\mathbf{R}(s) = f(s)\mathbf{i} + g(s)\mathbf{j}$، که در آن s طول قوسی است که از نقطهٔ خاص P_0 بر C تا نقطهٔ P سنجیده می‌شود، آنگاه بردار یکهٔ مماس C در P، درصورت وجود، عبارت است از*

$$\mathbf{T}(s) = D_s\mathbf{R}(s)$$

حال فرض‌کنیم معادلات پارامتری منحنی C شامل پارامتر t باشند، و بخواهیم معادلات پارامتری C را با پارامتر s، که طول قوس سنجیده شده از نقطهٔ ثابتی است، پیدا کنیم. اعمال مربوطه اغلب پیچیده‌اند. با اینحال، روش کار در مثال زیر توضیح داده شده است.

مثال ۲. معادلات پارامتری منحنی C عبارتند از $x = t^3$ و $y = t^2$، که $t \geq 0$. معادلات پارامتری C را با پارامتر s بیابید، که s طول قوس سنجیده شده از نقطه‌ای است که $t = 0$.

حل. هرگاه P_0 نقطه‌ای باشد که در آن $t = 0$، P_0 مبداء است. معادلهٔ برداری C عبارت است از

$$\mathbf{R}(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$$

چون $D_ts = |D_t\mathbf{R}(t)|$، از بردار بالا مشتق گرفته بدست می‌آوریم

$$D_t\mathbf{R}(t) = 3t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$$

درنتیجه،

$$|D_t\mathbf{R}(t)| = \sqrt{9t^4 + 4t^2} = \sqrt{t^2}\,\sqrt{9t^2 + 4}$$

چون $t \geq 0$، $\sqrt{t^2} = t$. لذا،

$$|D_t\mathbf{R}(t)| = t\sqrt{9t^2 + 4}$$

لذا،

$$D_t s = t\sqrt{9t^2+4}$$

و درنتیجه،

$$s = \int_0^t u\sqrt{9u^2+4}\,du$$
$$= \frac{1}{18}\int_0^t 18u\sqrt{9u^2+4}\,du$$
$$= \frac{1}{27}(9u^2+4)^{3/2}\Big]_0^t$$

بنابراین،

$$s = \frac{1}{27}(9t^2+4)^{3/2} - \frac{8}{27} \qquad (۸)$$

با حل (۸) نسبت به t و برحسب s، خواهیم داشت

$$(9t^2+4)^{3/2} = 27s+8$$
$$9t^2+4 = (27s+8)^{2/3}$$

چون $t \geq 0$،

$$t = \frac{1}{3}\sqrt{(27s+8)^{2/3}-4}$$

با گذاردن این t در معادلات پارامتری C، خواهیم داشت

$$x = \frac{1}{27}[(27s+8)^{2/3}-4]^{3/2} \quad \text{و} \quad y = \frac{1}{9}[(27s+8)^{2/3}-4] \qquad (۹)$$

امـا چـون $D_s\mathbf{R}(s) = \mathbf{T}(s)$، نتیجـه می‌شـود که اگر $\mathbf{R}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j}$، $\mathbf{T}(s) = (D_sx)\mathbf{i} + (D_sy)\mathbf{j}$. و چون $\mathbf{T}(s)$ بردار یکه است،

$$(D_sx)^2 + (D_sy)^2 = 1 \qquad (۱۰)$$

معادلهٔ (۱۰) را می‌توان برای امتحان معادلات (۹) بکار برد. این‌کار را به‌عنوان تمرین می‌گذاریم (ر.ک. تمرین ۱۷).

تمرینات ۱۶٫۸

در تمرینهای ۱ تـا ۱۰، بـرای منحنی داده شده $\mathbf{T}(t)$ و $\mathbf{N}(t)$ را بیابید، و در $t = t_1$ بخشی از منحنـی را بکشید و نمایشهای $\mathbf{T}(t_1)$ و $\mathbf{N}(t_1)$ را با نقطهٔ شروع در $t = t_1$ رسم نماییـد.

۱. $x = \frac{1}{3}t^3 - t, y = t^2; t_1 = 2$

۲. $x = \frac{1}{2}t^2, y = \frac{1}{3}t^3; t_1 = 1$

۳. $\mathbf{R}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j}; t_1 = 0$

۴. $\mathbf{R}(t) = e^{-2t}\mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j}; t_1 = 0$

۵. $\mathbf{R}(t) = 3\cos t\mathbf{i} + 3\sin t\mathbf{j}; t_1 = \frac{1}{2}\pi$

۶. $x = e^t\sin t, y = e^t\cos t; t_1 = 0$

۷. $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t; t_1 = \pi$

۸. $x = \cos kt, y = \sin kt, k > 0; t_1 = \pi/k$

۹. $\mathbf{R}(t) = \ln\cos t\mathbf{i} + \ln\sin t\mathbf{j}, 0 < t < \frac{1}{2}\pi; t_1 = \frac{1}{4}\pi$

۱۰. $\mathbf{R}(t) = t\cos t\mathbf{i} + t\sin t\mathbf{j}; t_1 = 0$

در تمرینهای ۱۱ تا ۱۳، $\mathbf{T}(t)$ و $\mathbf{N}(t)$ را برای منحنی به معادلهٔ برداری داده شده پیدا کنیـد.

۱۱. $\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + e^t\mathbf{j}$

۱۲. $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + \cosh t\mathbf{j}; t \geq 0$

۱۳. $\mathbf{R}(t) = \sin^3 t\mathbf{i} + \cos^3 t\mathbf{j}; 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$

۱۴. هرگاه معادلهٔ برداری‌منحنی C عبارت باشد از $\mathbf{R}(t) = 2\sin t\mathbf{i} + \sin 2t\mathbf{j}$، کسینوس زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{R}(\frac{1}{6}\pi)$ و $\mathbf{T}(\frac{1}{6}\pi)$ را بیابید.

۱۵. هرگاه معادلهٔ برداری‌منحنی C عبارت باشد از $\mathbf{R}(t) = 3t^2\mathbf{i} + (t^3 - 3t)\mathbf{j}$، کسینوس زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{R}(2)$ و $\mathbf{T}(2)$ را پیدا کنید.

۱۶. هرگاه معادلهٔ برداری منحنی C عبارت باشد از $\mathbf{R}(t) = (4 - 3t^2)\mathbf{i} + (t^3 - 3t)\mathbf{j}$، زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{N}(1)$ و $D_t^2\mathbf{R}(1)$ را پیدا کنید.

۱۷. معادلات (۹) حل مثال ۲ را با استفاده از معادلهٔ (۱۰) امتحان کنید.

در تمرینهای ۱۸ تا ۲۳، معادلات پارامتری منحنی با پارامتر طول قوس s را بیابید، که از نقطـه‌ای کـه $t = 0$ سنجیده می‌شود. نتیجهٔ خود را با استفاده از معادلهٔ (۱۰) امتحان کنید.

۱۸. $x = a\cos t, y = a\sin t$

۱۹. $x = 2 + \cos t, y = 3 + \sin t$

۲۰. $x = 2(\cos t + t\sin t), y = 2(\sin t - t\cos t)$

۲۱. $y = x^{3/2}$

۲۲. $x = t^2 - 1, y = \frac{1}{3}t^3$

۲۳. یک بازگشت بتوچرخزاد چهاربازگشتی:

$$\mathbf{R}(t) = a\cos^3 t\mathbf{i} + a\sin^3 t\mathbf{j}, 0 \leq t \leq \tfrac{1}{2}\pi$$

۲۴. در چرخزاد $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t)$، طول قوس s را به‌صورت تابعی از t بیان کنید، که s از نقطه‌ای که $t = 0$ سنجیده می‌شود.

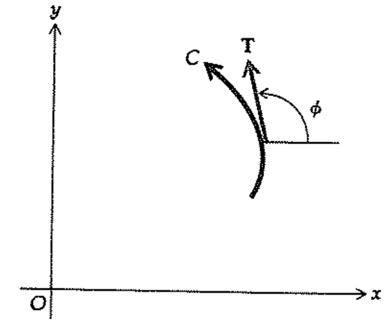
۲۵. در منحنی بـه معـادلات پارامتری $x = e^t\cos t$ و $y = e^t\sin t$، طول قوس s را به عنوان تابعی از t بیان کنید، که درآن s از نقطه‌ای که $t = 0$ سنجیده می‌شود.

۲۶. ثابت کنید معادلات پارامتری‌منحنی‌زنجیری $y = a\cosh(x/a)$، که‌درآن پارامتر s طول قوس‌از نقطهٔ $(0, a)$ تا نقطهٔ (x, y) است و $s \geq 0$ وقتی $x \geq 0$ و $s < 0$ وقتی $x < 0$، عبارتند از

$$y=\sqrt{a^2+s^2} \quad \text{و} \quad x=a\sinh^{-1}\frac{s}{a}$$

۹۰۱۶ انحنا

فرض کنیم ϕ زاویه‌ای باشد که جهت بردار یکهٔ مماس مربوط به منحنی C را مشخص می‌کند. پس ϕ زاویه از جهت محور مثبت x در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت به‌جهت بردار یکهٔ مماس $\mathbf{T}(t)$ است. ر.ک. شکل ۱۰۹۰۱۶



شکل ۱۰۹۰۱۶

چون $|\mathbf{T}(t)|=1$ ، از معادلهٔ (۱) در بخش ۲۰۱۶ نتیجه می‌شود که

(۱) $$\mathbf{T}(t)=\cos\phi\mathbf{i}+\sin\phi\mathbf{j}$$

با مشتقگیری نسبت به ϕ خواهیم داشت

(۲) $$D_\phi\mathbf{T}(t)=-\sin\phi\mathbf{i}+\cos\phi\mathbf{j}$$

چون $|D_\phi\mathbf{T}(t)|=\sqrt{(-\sin\phi)^2+(\cos\phi)^2}=1$ ، $D_\phi\mathbf{T}(t)$ بردار یکه است. و چون $\mathbf{T}(t)$ اندازهٔ ثابت دارد، از قضیهٔ ۱۱۰۵۰۱۶ نتیجه می‌شود که $D_\phi\mathbf{T}(t)$ بر $\mathbf{T}(t)$ عمود است.

$-\sin\phi$ را با $\cos(\frac{1}{2}\pi+\phi)$ و $\cos\phi$ را با $\sin(\frac{1}{2}\pi+\phi)$ عوض کرده، و (۲) را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

(۳) $$D_\phi\mathbf{T}(t)=\cos(\tfrac{1}{2}\pi+\phi)\mathbf{i}+\sin(\tfrac{1}{2}\pi+\phi)\mathbf{j}$$

از (۳) و بحث پیش معلوم می‌شود که بردار $D_\phi\mathbf{T}(t)$ بردار یکه‌ای است عمود بر $\mathbf{T}(t)$ در جهت $\frac{1}{2}\pi$ خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت از جهت $\mathbf{T}(t)$. بردار یکهٔ قائم $\mathbf{N}(t)$

نیز بر $\mathbf{T}(t)$ عمود است. بنابر قاعدهٔ زنجیره‌ای (قضیهٔ ۹۰۵۰۱۶)،

(۴) $$D_t\mathbf{T}(t)=[D_\phi\mathbf{T}(t)]D_t\phi$$

چون جهت $\mathbf{N}(t)$ با جهت $D_t\mathbf{T}(t)$ یکی است، از (۴) نتیجه می‌شود که اگر $D_t\phi>0$ (یعنی، اگر $\mathbf{T}(t)$ با افزایش t درجهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت بچرخد)، جهت $\mathbf{N}(t)$ با جهت $D_\phi\mathbf{T}(t)$ یکی است، و اگر $D_t\phi<0$ (یعنی، اگر $\mathbf{T}(t)$ با افزایش t درجهت حرکت عقربه‌های ساعت بچرخد)، جهت $\mathbf{N}(t)$ مخالف جهت $D_\phi\mathbf{T}(t)$ است. چون $D_\phi\mathbf{T}(t)$ و $\mathbf{N}(t)$ بردارهای یکه‌ای هستند، نتیجه می‌گیریم که

(۵) $$D_\phi\mathbf{T}(t)=\begin{cases}\mathbf{N}(t) & \text{اگر } D_t\phi>0 \\ -\mathbf{N}(t) & \text{اگر } D_t\phi<0\end{cases}$$

توضیح ۱. در شکل ۲۰۹۰۱۶ (آ)، (ب)، (پ)، و (ت) حالات مختلفی نموده شده‌اند. در (آ) و (ب)، $D_t\phi>0$ ، و در (پ) و (ت)، $D_t\phi<0$. جهت مثبت در امتداد منحنی C با سرسهم بر C نموده شده است. در هر شکل زاویهٔ ϕ و نمایشهای بردارهای $\mathbf{T}(t)$ ، $D_\phi\mathbf{T}(t)$ ، و $\mathbf{N}(t)$ نموده شده‌اند. **نمایش بردار یکهٔ قائم همیشه در طرف تقعر منحنی است.**

حال $D_s\mathbf{T}(t)$ را درنظر می‌گیریم، که در آن s طول قوس است که از نقطهٔ بدلخواه اختیار شده بر C تا نقطهٔ P سنجیده می‌شود و s با افزایش t افزایش می‌یابد. طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای،

$$D_s\mathbf{T}(t)=D_\phi\mathbf{T}(t)D_s\phi$$

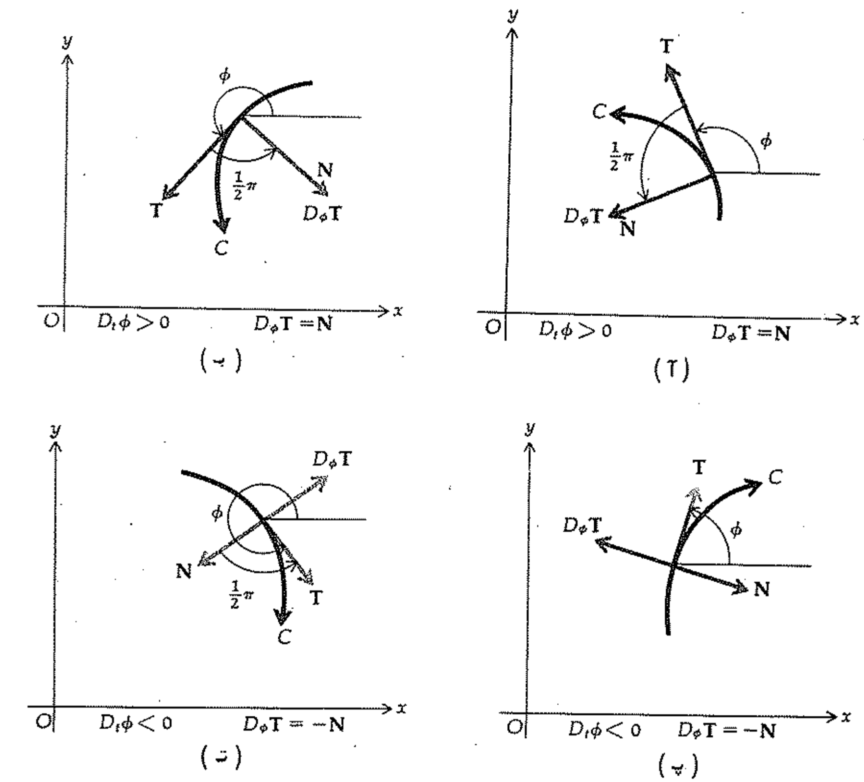
لذا،

$$|D_s\mathbf{T}(t)|=|D_\phi\mathbf{T}(t)D_s\phi|=|D_\phi\mathbf{T}(t)||D_s\phi|$$

اما چون $D_\phi\mathbf{T}(t)$ بردار یکه است، $|D_\phi\mathbf{T}(t)|=1$ ؛ لذا،

(۶) $$|D_s\mathbf{T}(t)|=|D_s\phi|$$

عدد $|D_s\phi|$ قدر مطلق میزان تغییر زاویه‌ای است که جهت بردار یکهٔ مماس $\mathbf{T}(t)$ در نقطه‌ای از منحنی را می‌دهد نسبت به طول قوس منحنی. این عدد ***انحنای*** منحنی در آن نقطه نام دارد. پیش از تعریف صوری انحنا، نشان می‌دهیم که اختیار این عدد به عنوان انحنا با تصور شهودی ما از انحنا سازگار است. مثلاً، در نقطهٔ P بر C ، زاویهٔ ϕ جهت بردار $\mathbf{T}(t)$ را می‌دهد، و s طول قوس از نقطهٔ P_0 بر C تا P است. فرض کنیم Q نقطه‌ای بر C باشد که زاویه‌ای که جهت $\mathbf{T}(t+\Delta t)$ را در Q می‌دهد $\phi+\Delta\phi$ بوده و $s+\Delta s$ طول قوس از P_0 تا Q باشد. دراین صورت، طول قوس از P تا Q مساوی



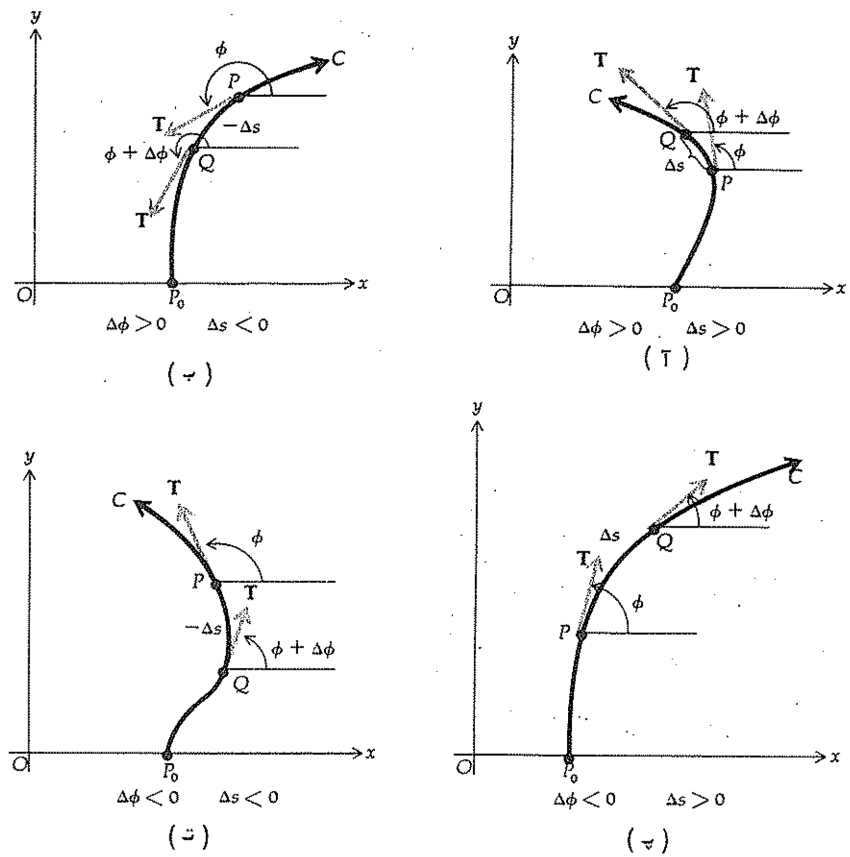
شکل ۲.۹.۱۶

Δs بوده ، و نسبت $\Delta\phi/\Delta s$ ظاهرا" سنجش مناسبی است از آنچه شهودا" ***انحنای متوسط*** در امتداد قوس PQ تصور می‌شود .

توضیح ۲. ر.ک. شکل ۳.۹.۱۶ (آ) ، (ب) ، (پ) ، و (ت) . در (آ) ، $\Delta\phi > 0$ و $\Delta s > 0$ ؛ در (ب) ، $\Delta\phi > 0$ و $\Delta s < 0$ ؛ در (پ) ، $\Delta\phi < 0$ و $\Delta s > 0$ ؛ در (ت) ، $\Delta\phi < 0$ و $\Delta s < 0$.

۱.۹.۱۶ تعریف. هرگاه $\mathbf{T}(t)$ بردار یکهٔ مماس بر منحنی C در نقطهٔ P بوده ، s طول قوس سنجیده شده از نقطه‌ی دلخواه بر C تا P باشد ، و s با افزایش t زیاد شود ، آنگاه ***بردار انحنای*** C در P ، که با $\mathbf{K}(t)$ نموده می‌شود ، عبارت است از

$$\mathbf{K}(t) = D_s\mathbf{T}(t)$$



شکل ۳.۹.۱۶

انحنای C در P ، که با $K(t)$ نموده می‌شود ، اندازهٔ بردار انحنا است .

برای یافتن بردار انحنای یک منحنی خاص ، شایسته است فرمولی برای بیان بردار انحنا برحسب مشتقات نسبت به t داشته باشیم . طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای ،

$$D_t\mathbf{T}(t) = [D_s\mathbf{T}(t)]D_t s$$

از تعویض $D_t s$ با $|D_t\mathbf{R}(t)|$ و تقسیم بر این ، بدست می‌آوریم $D_s\mathbf{T}(t) = D_t\mathbf{T}(t)/|D_t\mathbf{R}(t)|$. درنتیجه ، از (۷) داریم

$$\mathbf{K}(t) = \frac{D_t\mathbf{T}(t)}{|D_t\mathbf{R}(t)|} \tag{۸}$$

چون $K(t) = |\mathbf{K}(t)|$ ، انحنا عبارت است از

$$K(t) = \left|\frac{D_t\mathbf{T}(t)}{|D_t\mathbf{R}(t)|}\right| \tag{۹}$$

مثال ۱. دایرهٔ $x = a\cos t,\ y = a\sin t$ ، که‌درآن $a > 0$ ، داده شده است. بردار انحنا و انحنا درهر t را بیابید.

حل. معادلهٔ برداری دایره عبارت است از

$$\mathbf{R}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j}$$

درنتیجه،

$$D_t\mathbf{R}(t) = -a\sin t\mathbf{i} + a\cos t\mathbf{j}$$
$$|D_t\mathbf{R}(t)| = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2} = a$$

بنابراین،

$$\mathbf{T}(t) = \frac{D_t\mathbf{R}(t)}{|D_t\mathbf{R}(t)|} = -\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$$
$$D_t\mathbf{T}(t) = -\cos t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j}$$
$$\frac{D_t\mathbf{T}(t)}{|D_t\mathbf{R}(t)|} = -\frac{\cos t}{a}\mathbf{i} - \frac{\sin t}{a}\mathbf{j}$$

درنتیجه، بردار انحنا مساوی است با

$$\mathbf{K}(t) = -\frac{1}{a}\cos t\mathbf{i} - \frac{1}{a}\sin t\mathbf{j}$$

و انحنا برابر است با

$$K(t) = |\mathbf{K}(t)| = \frac{1}{a}$$

مثال ۱ **می‌گوید** که انحنای یک دایره ثابت بوده و معکوس شعاع است.

منحنی C داده شده است و درنقطهٔ P انحنا موجود و مساوی $K(t)$ است، که در آن $K(t) \neq 0$. دایره‌ای درنظر می‌گیریم که بر منحنی C در P مماس‌بوده و دارای انحنای $K(t)$ در P است. از مثال ۱ معلوم می‌شود که شعاع این دایره $1/K(t)$ بوده و مرکزش‌بر خطی عمود بر خط مماس درجهت $\mathbf{N}(t)$ است. این دایره ***دایرهٔ انحنا*** نام دارد، و شعاعش ***شعاع انحنای*** C در P است. دایرهٔ انحنا را گاهی ***دایرهٔ بوسان*** می‌نامند.

۲.۹.۱۶ تعریف. هرگاه $K(t)$ انحنای‌منحنی C درنقطهٔ P بوده‌و $K(t) \neq 0$، آنگاه ***شعاع انحنای*** C در P ، با $\rho(t)$ نموده ، و با

$$\rho(t) = \frac{1}{K(t)}$$

تعریف می‌شود.

مثال ۲. به‌فرض‌آنکه‌معادلهٔ‌برداری‌منحنی C عبارت‌باشد‌از $\mathbf{R}(t) = 2t\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j}$ ، انحنا و شعاع انحنا در $t = 1$ را بیابید. منحنی، بردار یکهٔ مماس، و دایرهٔ انحنا در $t = 1$ را رسم کنید.

حل

$$\mathbf{R}(t) = 2t\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j}$$
$$D_t\mathbf{R}(t) = 2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$$
$$|D_t\mathbf{R}(t)| = 2\sqrt{1 + t^2}$$
$$\mathbf{T}(t) = \frac{D_t\mathbf{R}(t)}{|D_t\mathbf{R}(t)|} = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}\mathbf{i} + \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}\mathbf{j}$$
$$D_t\mathbf{T}(t) = -\frac{t}{(1 + t^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{1}{(1 + t^2)^{3/2}}\mathbf{j}$$
$$\frac{D_t\mathbf{T}(t)}{|D_t\mathbf{R}(t)|} = -\frac{t}{2(1 + t^2)^2}\mathbf{i} + \frac{t}{2(1 + t^2)^2}\mathbf{j}$$
$$K(t) = \left|\frac{D_t\mathbf{T}(t)}{|D_t\mathbf{R}(t)|}\right| = \sqrt{\frac{t^2}{4(1 + t^2)^4} + \frac{1}{4(1 + t^2)^4}}$$
$$K(t) = \frac{1}{2(1 + t^2)^{3/2}}$$

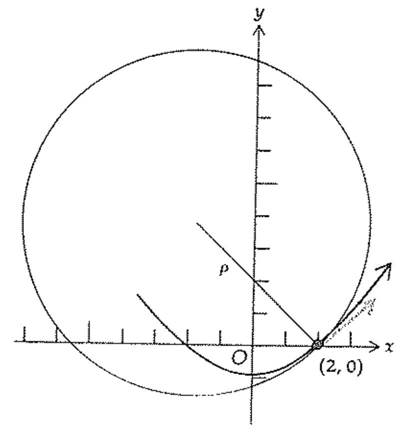
لذا ،

$$K(1)=\frac{1}{4\sqrt{2}}\qquad \rho(1)=4\sqrt{2}$$

و

$$\mathbf{T}(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

شکل ۴.۹.۱۶ رسم مطلوب را نشان می‌دهد. جدول ۱.۹.۱۶ مقادیر x و y نظیر به $t=-2,-1,0,1,2$ را بدست می‌دهد.



شکل ۴.۹.۱۶

حال برای محاسبهٔ مستقیم انحنا از معادلات پارامتری منحنی ، یعنی $x=f(t)$ و $y=g(t)$ ، فرمولی پیدا می‌کنیم . از معادلهٔ (۶) داریم $|D_s\mathbf{T}(t)|=|D_s\phi|$ ؛ درنتیجه ،

$$K(t)=|D_s\phi|$$

t	x	y
-2	-4	3
-1	-2	0
0	0	-1
1	2	0
2	4	3

جدول ۱.۹.۱۶

با فرض افزایش s و t باهم ، داریم

$$D_s\phi=\frac{d\phi}{ds}=\frac{\dfrac{d\phi}{dt}}{\dfrac{ds}{dt}}=\frac{\dfrac{d\phi}{dt}}{\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}}$$

لذا ،

$$D_s\phi=\frac{\dfrac{d\phi}{dt}}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}}\tag{۱۰}$$

برای یافتن $d\phi/dt$ می‌بینیم که چون ϕ زاویه‌ای است که جهت بردار یکهٔ مماس را می‌دهد ،

$$\tan\phi=\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}\tag{۱۱}$$

اگر از طرف راست (۱۱) نسبت به t مشتق ضمنی بگیریم ، خواهیم داشت

$$\sec^2\phi\,\frac{d\phi}{dt}=\frac{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)-\left(\dfrac{dy}{dt}\right)\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2}$$

درنتیجه ،

$$\frac{d\phi}{dt}=\frac{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)-\left(\dfrac{dy}{dt}\right)\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)}{\sec^2\phi\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2}\tag{۱۲}$$

اما

$$\sec^2\phi=1+\tan^2\phi=1+\frac{\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2}$$

با گذاردن این عبارت برای $\sec^2\phi$ در (۱۲) ، بدست می‌آوریم

$$\frac{d\phi}{dt}=\frac{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)-\left(\dfrac{dy}{dt}\right)\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}\tag{۱۳}$$

و با گذاردن (۱۳) در (۱۰)، چون $K(t) = |D_s\phi|$ ، خواهیم داشت

$$K(t) = \frac{\left|\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) - \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)\right|}{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{3/2}} \qquad (۱۴)$$

مثال ۳. انحنای منحنی مثال ۲ را با فرمول (۱۴) بدست آورید.

حل. معادلات پارامتری C عبارتند از $x = 2t$ و $y = t^2 - 1$. لذا،

$$\frac{dx}{dt}=2 \qquad \frac{d^2x}{dt^2}=0 \qquad \frac{dy}{dt}=2t \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=2$$

بنابراین، از (۱۴) داریم

$$K(t) = \frac{|2(2)-2t(0)|}{[(2)^2+(2t)^2]^{3/2}} = \frac{4}{(4+4t^2)^{3/2}} = \frac{1}{2(1+t^2)^{3/2}}$$

فرض‌کنید معادلهٔ دکارتی یک‌منحنی به‌شکل $y=F(x)$ یا $x=G(y)$ باشد. دراین وضع می‌توان از حالات خاص فرمول (۱۴) برای یافتن انحنای یک منحنی استفاده کرد. هرگاه $y=F(x)$ معادلهٔ منحنی C باشد، یک دستگاه از معادلات پارامتری C عبارت‌است‌از $x=t$ و $y=F(t)$. پس $dx/dt=1$ ، $d^2x/dt^2=0$ ، $dy/dt=dy/dx$ ، و $d^2y/dt^2 = d^2y/dx^2$. باگذاردن اینها در (۱۴) خواهیم داشت

$$K = \frac{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \qquad (۱۵)$$

بهمین‌نحو، اگر معادلهٔ منحنی C مساوی $x=G(y)$ باشد،

$$K = \frac{\left|\frac{d^2x}{dy^2}\right|}{\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{3/2}} \qquad (۱۶)$$

مثال ۴. اگر منحنی C به معادلهٔ $xy=1$ باشد، شعاع انحنای C در نقطهٔ $(1,1)$ را یافته، و منحنی و دایرهٔ انحنا در $(1,1)$ را رسم نمایید.

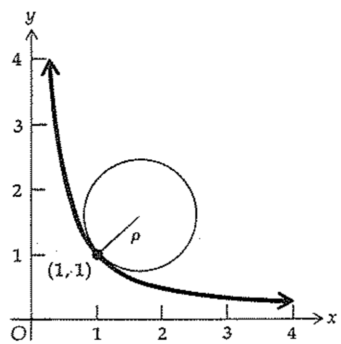
حل. باحل‌نسبت‌به y داریم $y=1/x$. درنتیجه، $dy/dx = -1/x^2$ و $d^2y/dx^2 = 2/x^3$. از فرمول (۱۵) داریم

$$K = \frac{\left|\frac{2}{x^3}\right|}{\left[1+\left(\frac{1}{x^4}\right)\right]^{3/2}} = \frac{2x^6}{|x^3|(x^4+1)^{3/2}} = \frac{2x^4}{|x|(x^4+1)^{3/2}}$$

چون $\rho = 1/K$ ،

$$\rho = \frac{|x|(x^4+1)^{3/2}}{2x^4}$$

درنتیجه، در $(1,1)$ ، $\rho=\sqrt{2}$. رسم مطلوب در شکل ۵.۹.۱۶ نموده شده است.



شکل ۵.۹.۱۶

تمرینات ۹.۱۶

در تمرینهای ۱ تا ۴، انحنای K و شعاع انحنای ρ در نقطه‌ای که $t=t_1$ را بیابید. با استفاده‌از فرمول (۹)، K را بیابید. منحنی، و نیز بردار یکهٔ مماس و دایرهٔ انحنا در $t=t_1$ را رسم نمایید.

۱. $\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + (2t+1)\mathbf{j};\ t_1 = 1$

۲. $\mathbf{R}(t) = (t^2-2t)\mathbf{i} + (t^3-t)\mathbf{j};\ t_1=1$

۳. $\mathbf{R}(t) = 2e^t\mathbf{i}+2e^{-t}\mathbf{j};\ t_1=0$

۴. $\mathbf{R}(t)=\sin t\mathbf{i}+\sin 2t\mathbf{j};\ t_1=\frac{1}{2}\pi$

در تمرینهای ۵ و ۶، انحنای K را با استفاده از فرمول (۱۴) بیابید. سپس K و ρ را

در نقطه‌ای که $t = t_1$ یافته و منحنی ، و نیز بردار یکهٔ مماس و دایرهٔ انحنا در $t = t_1$ را رسم نمایید .

۵ . $x = \frac{1}{1+t}, y = \frac{1}{1-t}; t_1 = 0$

۶ . $x = e^t + e^{-t}, y = e^t - e^{-t}; t_1 = 0$

در تمرینهای ۷ تا ۱۴ ، منحنی K و شعاع انحنای ρ در نقطهٔ داده شده را بیابید . منحنی ، خط مماس، و دایرهٔ انحنا در نقطهٔ داده شده را رسم کنید .

۷ . $y = 2\sqrt{x}; (0, 0)$

۸ . $y^2 = x^3; (\frac{1}{4}, \frac{1}{8})$

۹ . $y = e^x; (0, 1)$

۱۰ . $y = \ln x; (e, 1)$

۱۱ . $x = \sin y; (\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\pi)$

۱۲ . $4x^2 + 9y^2 = 36; (0, 2)$

۱۳ . $x = \sqrt{y-1}; (2, 5)$

۱۴ . $x = \tan y; (1, \frac{1}{4}\pi)$

در تمرینهای ۱۵ تا ۲۲ ، شعاع انحنای منحنی در یک نقطه را بیابید .

۱۵ . $y = \sin^{-1} x$

۱۶ . $y = \ln \sec x$

۱۷ . $4x^2 - 9y^2 = 16$

۱۸ . $x = \tan^{-1} y$

۱۹ . $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$

۲۰ . $\mathbf{R}(t) = e^t \sin t\mathbf{i} + e^t \cos t\mathbf{j}$

۲۱ . چرخزاد $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$

۲۲ . کشاننده $x = t - a \tanh \frac{t}{a}, y = a\, \mathrm{sech} \frac{t}{a}$

۲۳ . نشان دهید که انحنای منحنی زنجیری $y = a \cosh (x/a)$ در نقطهٔ (x, y) برمنحنی مساوی a/y^2 است . دایرهٔ انحنا در $(0, a)$ را رسم کنید . نشان دهید که انحنای K در نقطهٔ $(0, a)$ بدون ارجاع به $K'(x)$ ماکزیمم مطلق است .

در تمرینهای ۲۴ تا ۲۸ ، نقطه‌ای ازمنحنی را بیابید که در آن انحنا ماکزیمم مطلق باشد .

۲۴ . $y = e^x$

۲۵ . $y = 6x - x^2$

۲۶ . $y = \sin x$

۲۷ . $\mathbf{R}(t) = (2t - 3)\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j}$

۲۸ . $y = x^2 - 2x + 3$

۲۹ . معادلهٔ دایرهٔ انحنای $y = e^x$ در نقطهٔ $(0, 1)$ را بیابید .

۳۰ . هرگاه معادلهٔ قطبی یک منحنی $r = F(\theta)$ باشد ، ثابت کنید انحنای K از فرمول زیر بدست می‌آید :

$$K = \frac{|r^2 + 2(dr/d\theta)^2 - r(d^2r/d\theta^2)|}{[r^2 + (dr/d\theta)^2]^{3/2}}$$

در تمرینهای ۳۱ تا ۳۴ ، انحنای K و شعاع انحنای ρ درنقطهٔ داده شده را بیابید . با

استفاده از فرمول تمرین ۳۰ ، K را پیدا نمایید .

۳۱ . $r = 4 \cos 2\theta; \theta = \frac{1}{12}\pi$

۳۲ . $r = 1 - \sin \theta; \theta = 0$

۳۳ . $r = a \sec^2 \frac{1}{2}\theta; \theta = \frac{2}{3}\pi$

۳۴ . $r = a\theta; \theta = 1$

۳۵ . مرکز دایرهٔ انحنای منحنی C در نقطهٔ P **مرکز انحنا** در P نام دارد . ثابت‌کنید مختصات مرکز انحنای یک منحنی در $P(x, y)$ عبارت است از

$$x_c = x - \frac{(dy/dx)[1 + (dy/dx)^2]}{d^2y/dx^2} \qquad y_c = y + \frac{(dy/dx)^2 + 1}{d^2y/dx^2}$$

درتمرینهای ۳۶ تا ۳۸ ، انحنای K ، شعاع انحنای ρ ، و مرکز انحنا در نقطهٔ داده‌شده را بیابید . منحنی و دایرهٔ انحنا را رسم کنید .

۳۶ . $y = \ln x; (1, 0)$

۳۷ . $y = x^4 - x^2; (0, 0)$

۳۸ . $y = \cos x; (\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2})$

در تمرینهای ۳۹ تا ۴۲ ، مختصات مرکز انحنا دریک نقطه را پیدا کنید .

۳۹ . $y^2 = 4px$

۴۰ . $y^3 = a^2x$

۴۱ . $\mathbf{R}(t) = a \cos t\mathbf{i} + b \sin t\mathbf{j}$

۴۲ . $\mathbf{R}(t) = a \cos^3 t\mathbf{i} + a \sin^3 t\mathbf{j}$

۴۳ . نشان دهید که انحنای یک خط مستقیم در هر نقطه صفر است .

۱۰.۱۶ مولفه‌های مماسی و قائم شتاب

هرگاه ذره‌ای که در امتداد منحنی C حرکت می‌کند به معادلهٔ برداری

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} \qquad (1)$$

باشد ، از تعریف ۱.۷.۱۶ معلوم می‌شود که بردار سرعت در P عبارت است از

$$\mathbf{V}(t) = D_t\mathbf{R}(t) \qquad (2)$$

در بخش ۸.۱۶ دیدیم که‌اگر $\mathbf{T}(t)$ بردار یکهٔ مماس‌در P بوده ، s طول‌قوس C از نقطهٔ ثابت P_0 تا P باشد ، و s با افزایش t زیاد شود ،

$$D_t\mathbf{R}(t) = D_ts[\mathbf{T}(t)] \qquad (3)$$

با گذاردن (۳) در (۲) ، داریم

$$\mathbf{V}(t) = D_ts[\mathbf{T}(t)] \qquad (4)$$

معادلهٔ (۴) بردارسرعت دریک نقطه را به‌صورت حاصل‌ضرب یک اسکالر در بردار یکهٔ مماس درآن نقطه بیان می‌کند . حال بردار شتاب در یک نقطه را برحسب بردارهای یکهٔ مماس و قائم درآن نقطه بیان می‌کنیم . از تعریف ۲.۷.۱۶ معلوم می‌شود که بردار

شتاب در P عبارت است از

$$\mathbf{A}(t) = D_t^2\mathbf{R}(t) \tag{۵}$$

از رابطهٔ (۶) در بخش ۸٫۱۶ داریم

$$D_t^2\mathbf{R}(t) = [D_t|D_t\mathbf{R}(t)|]\mathbf{T}(t) + |D_t\mathbf{R}(t)||D_t\mathbf{T}(t)|\mathbf{N}(t) \tag{۶}$$

چون

$$D_t s = |D_t\mathbf{R}(t)| \tag{۷}$$

با مشتقگیری از این رابطه نسبت به t بدست می‌آید

$$D_t^2 s = D_t|D_t\mathbf{R}(t)| \tag{۸}$$

بعلاوه،

$$|D_t\mathbf{R}(t)||D_t\mathbf{T}(t)| = |D_t\mathbf{R}(t)|^2\left|\frac{D_t\mathbf{T}(t)}{|D_t\mathbf{R}(t)|}\right| \tag{۹}$$

با اعمال رابطهٔ (۷) در بالا و معادلهٔ (۹) از بخش ۹٫۱۶ برطرف راست (۹)، خواهیم داشت

$$|D_t\mathbf{R}(t)||D_t\mathbf{T}(t)| = (D_t s)^2 K(t) \tag{۱۰}$$

با گذاردن (۵)، (۸)، و (۱۰) در (۶)، بدست می‌آوریم

$$\mathbf{A}(t) = (D_t^2 s)\mathbf{T}(t) + (D_t s)^2 K(t)\mathbf{N}(t) \tag{۱۱}$$

معادلهٔ (۱۱) بردار شتاب را به‌صورت حاصل‌ضرب یک اسکالر در بردار یکهٔ مماس بعلاوهٔ حاصل‌ضرب یک اسکالر در بردار یکهٔ قائم بیان می‌کند. ضریب $\mathbf{T}(t)$ **مولفهٔ مماسی** بردار شتاب نام دارد و با $A_T(t)$ نموده می‌شود، حال‌آنکه ضریب $\mathbf{N}(t)$ **مولفهٔ قائم** بردار شتاب نامیده شده و با $A_N(t)$ نموده خواهد شد. درنتیجه،

$$A_T(t) = D_t^2 s \tag{۱۲}$$

و

$$A_N(t) = (D_t s)^2 K(t) \tag{۱۳}$$

یا، معادلاً،

$$A_N(t) = \frac{(D_t s)^2}{\rho(t)} \tag{۱۴}$$

چون مقدار سرعت ذره درلحظهٔ t مساوی $D_t s = |\mathbf{V}(t)|$ است، $A_T(t)$ مشتق مقدار سرعت ذره بوده و $A_N(t)$ مربع مقدار سرعت بخش بر شعاع انحنا است.

از قانون دوم حرکت نیوتن داریم

$$\mathbf{F} = m\mathbf{A}$$

که درآن بردار $\mathbf{F}$ نیروی وارد بر جسم متحرک، m جرم جسم، و $\mathbf{A}$ بردار شتاب جسم است. درحرکت منحنی‌الخط مولفهٔ قائم $\mathbf{F}$ نیروی قائم به منحنی است که برای نگهداشتن جسم بر منحنی لازم است. مثلاً، اگر اتومبیلی درطول یک منحنی با سرعت زیاد حرکت کند، نیروی قائم باید اندازهٔ زیادی داشته باشد تا اتومبیل را درجاده نگهدارد. همچنین، اگر منحنی تیز باشد، شعاع انحنا عدد کوچکی است؛ درنتیجه، اندازهٔ نیروی قائم باید عدد بزرگی باشد.

معادلهٔ (۴) نشان می‌دهد که مولفهٔ مماسی بردار سرعت $D_t s$، و مولفهٔ قائم بردار سرعت صفر است.

با گذاردن (۱۲) و (۱۳) در (۱۱)، داریم

$$\mathbf{A}(t) = A_T(t)\mathbf{T}(t) + A_N(t)\mathbf{N}(t) \tag{۱۵}$$

که از آن نتیجه می‌شود که

$$|\mathbf{A}(t)| = \sqrt{[A_T(t)]^2 + [A_N(t)]^2}$$

با حل‌آن نسبت به $A_N(t)$، و اینکه از (۱۳) نتیجه می‌شود که $A_N(t)$ نامنفی است، داریم

$$A_N(t) = \sqrt{|\mathbf{A}(t)|^2 - [A_T(t)]^2} \tag{۱۶}$$

مثال ۱. ذره‌ای درامتداد یک منحنی به معادلهٔ برداری $\mathbf{R}(t) = (t^2 - 1)\mathbf{i} + (\frac{1}{3}t^3 - t)\mathbf{j}$ در حرکت است. بردارهای $\mathbf{V}(t)$، $\mathbf{A}(t)$، $\mathbf{T}(t)$، و $\mathbf{N}(t)$ را بیابید. همچنین، اسکالرهای $|\mathbf{V}(t)|$، $A_T(t)$، $A_N(t)$، و $K(t)$ را پیدا کنید. مقادیر خاص را وقتی $t = 2$ پیدا کنید. بخشی از منحنی که شامل نقطه‌ای که درآن $t = 2$ باشد را رسم کنید، و نمایشهای $\mathbf{V}(2)$، $\mathbf{A}(2)$، $A_T(2)\mathbf{T}(2)$، و $A_N(2)\mathbf{N}(2)$ که در نقطهٔ شروعشان $t = 2$ را رسم نمایید.

حل

$$\mathbf{V}(t) = D_t\mathbf{R}(t) = 2t\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j}$$
$$\mathbf{A}(t) = D_t\mathbf{V}(t) = 2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$$
$$|\mathbf{V}(t)| = \sqrt{4t^2 + t^4 - 2t^2 + 1} = \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} = t^2 + 1$$
$$|\mathbf{A}(t)| = \sqrt{4 + 4t^2} = 2\sqrt{1 + t^2}$$

$$D_t s = |\mathbf{V}(t)| = t^2 + 1$$
$$A_T(t) = D_t^2 s = 2t$$

از (۱۶) داریم

$$A_N(t) = \sqrt{|\mathbf{A}(t)|^2 - [A_T(t)]^2} = \sqrt{4 + 4t^2 - 4t^2} = 2$$
$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{V}(t)}{|\mathbf{V}(t)|} = \frac{2t}{t^2+1}\mathbf{i} + \frac{t^2-1}{t^2+1}\mathbf{j}$$

برای یافتن $\mathbf{N}(t)$، از فرمول زیر که از (۱۱) بدست می‌آید استفاده می‌کنیم:

$$\mathbf{N}(t) = \frac{1}{(D_t s)^2 K(t)}[\mathbf{A}(t) - (D_t^2 s)\mathbf{T}(t)] \qquad (۱۷)$$

$$\mathbf{A}(t) - (D_t^2 s)\mathbf{T}(t) = 2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} - 2t\left(\frac{2t}{t^2+1}\mathbf{i} + \frac{t^2-1}{t^2+1}\mathbf{j}\right)$$

$$\mathbf{A}(t) - (D_t^2 s)\mathbf{T}(t) = \frac{2}{t^2+1}[(1-t^2)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}] \qquad (۱۸)$$

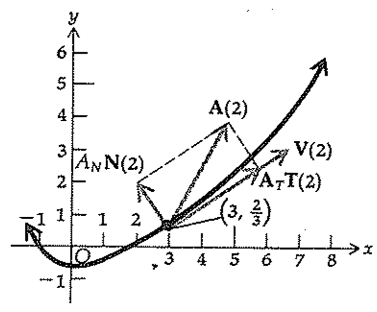
از (۱۷) معلوم می‌شود که $\mathbf{N}(t)$ مساوی حاصل ضرب یک اسکالر در بردار (۱۸) است. چون $\mathbf{N}(t)$ یک بردار یکه است، $\mathbf{N}(t)$ را می‌توان با تقسیم بردار (۱۸) براندازه‌اش بدست آورد. لذا،

$$\mathbf{N}(t) = \frac{(1-t^2)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}}{\sqrt{(1-t^2)^2 + (2t)^2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}\mathbf{i} + \frac{2t}{1+t^2}\mathbf{j}$$

$K(t)$ از (۱۳) بدست می‌آید، و داریم

$$K(t) = \frac{A_N(t)}{(D_t s)^2} = \frac{2}{(t^2+1)^2}$$

وقتی $t = 2$، بدست می‌آوریم $\mathbf{V}(2) = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$، $\mathbf{A}(2) = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$، $|\mathbf{V}(2)| = 5$،



شکل ۱۶.۱۰.۱

$A_T(2) = 4$، $A_N(2) = 2$، $\mathbf{T}(2) = \frac{4}{5}\mathbf{i} + \frac{3}{5}\mathbf{j}$، $\mathbf{N}(2) = -\frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$، $K(2) = \frac{2}{25}$. رسم مطلوب در شکل ۱۶.۱۰.۱ نموده شده است.

تمرینات ۱۶.۱۰

در تمرینهای ۱ تا ۳، ذره‌ای در امتداد یک منحنی به معادلهٔ برداری داده شده حرکت می‌کند. درهر تمرین، بردارهای $\mathbf{V}(t)$ و $\mathbf{A}(t)$ و اسکالرهای $A_T(t)$ و $A_N(t)$ را پیداکنید.

۱. $\mathbf{R}(t) = (t^3 - 3t)\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$ ۲. $\mathbf{R}(t) = 2\sin 4t\mathbf{i} + 2\cos 4t\mathbf{j}$

۳. $\mathbf{R}(t) = (\cos t + t\sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t\cos t)\mathbf{j};\ t \geq 0$

در تمرینهای ۴ و ۵، ذره‌ای در امتداد یک منحنی به معادلهٔ برداری داده شدهٔ حرکت می‌کند. در هر تمرین، $\mathbf{V}(t_1)$، $\mathbf{A}(t_1)$، $A_T(t_1)$، و $A_N(t_1)$ را بەازای مقدار داده شدهٔ t_1 بیابید.

۴. $\mathbf{R}(t) = e^{-2t}\mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j};\ t_1 = \ln 2$ ۵. $\mathbf{R}(t) = \sin^3 t\mathbf{i} + \cos^3 t\mathbf{j};\ t_1 = \frac{1}{4}\pi$

۶. هرگاه $\mathbf{R}(t) = (t^2 + 4)\mathbf{i} + (2t - 5)\mathbf{j}$، اسکالرهای $|\mathbf{V}(t)|$، $A_T(t)$، $A_N(t)$، و $K(t)$ را پیدا کنید.

در تمرینهای ۷ تا ۱۲، ذره‌ای در امتداد یک منحنی به معادلهٔ برداری داده شده حرکت می‌کند. درهرتمرین، بردارهای $\mathbf{V}(t)$، $\mathbf{A}(t)$، $\mathbf{T}(t)$، و $\mathbf{N}(t)$ را یافته، و اسکالرهای زیر را بەازای مقدار دلخواه t بیابید: $|\mathbf{V}(t)|$، $A_T(t)$، $A_N(t)$، و $K(t)$. همچنین، مقادیرخاص راوقتی $t = t_1$ پیداکنید. در $t = t_1$، منحنی و نمایشهای بردارهای $\mathbf{V}(t_1)$، $\mathbf{A}(t_1)$، $A_T(t_1)\mathbf{T}(t_1)$، و $A_N(t_1)\mathbf{N}(t_1)$ را رسم نمایید.

۷. $\mathbf{R}(t) = (2t + 3)\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j};\ t_1 = 2$ ۸. $\mathbf{R}(t) = (t - 1)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j};\ t_1 = 1$

۹. $\mathbf{R}(t) = 5\cos 3t\mathbf{i} + 5\sin 3t\mathbf{j};\ t_1 = \frac{1}{3}\pi$ ۱۰. $\mathbf{R}(t) = 3t^2\mathbf{i} + \mathbf{j};\ t_1 = 1$

۱۱. $\mathbf{R}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j};\ t_1 = 0$ ۱۲. $\mathbf{R}(t) = \cos t^2\mathbf{i} + \sin t^2\mathbf{j};\ t_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

در تمرینهای ۱۳ و ۱۴، ذره‌ای درامتداد یک منحنی به معادلهٔ دکارتی داده شده‌حرکت می‌کند. در نقطهٔ داده شده (آ) بردار موضع، (ب) بردار سرعت، (پ) بردار شتاب، (ت) A_T، و (ث) A_N را بیابید.

۱۳. $y = 4x^2;\ (1, 4)$ ۱۴. $y^2 = x^3;\ (4, 8)$

۱۵. ذره‌ای در امتداد سهمی $y^2 = 8x$ حرکت می‌کند و مقدار سرعتش ثابت است. وقتی ذره در $(2, 4)$ است، کمیات زیر را پیدا کنید: بردار موضع، بردار سرعت، بردار شتاب، بردار یکهٔ مماس، بردار یکهٔ قائم، A_T، A_N.

۱۶ . ذره‌ای در امتداد شاخهٔ بالایی هذلولی $y^2 - x^2 = 9$ طوری حرکت می‌کندکه $D_t x$ یک ثابت مثبت است . کمیات زیر را وقتی ذره در $(4, 5)$ است بیابید . بردارموضع، بردار سرعت ، بردار شتاب ، بردار یکهٔ مماس بردار یکهٔ قائم ، A_T ، و A_N .

تمرینات دوره‌ای برای فصل ۱۶

در تمرینهای ۱ تا ۱۴، $\mathbf{A} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$ ، $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 7\mathbf{j}$ ، و $\mathbf{C} = 9\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$.

۱ . $3\mathbf{B} - 7\mathbf{A}$ را بیابید

۲ . $5\mathbf{B} - 3\mathbf{C}$ را بیابید .

۳ . $|3\mathbf{B} - 7\mathbf{A}|$ را بیابید .

۴ . $|5\mathbf{B} - 3\mathbf{C}|$ را بیابید .

۵ . $|3\mathbf{B}| - |7\mathbf{A}|$ را بیابید .

۶ . $|5\mathbf{B}| - |3\mathbf{C}|$ را بیابید .

۷ . $(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ را بیابید .

۸ . $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ را بیابید .

۹ . بردار یکه‌ای بیابید که با $2\mathbf{A} + \mathbf{B}$ همجهت باشد .

۱۰ . بردار یکه‌ای بیابید که بر $\mathbf{B}$ عمود باشد .

۱۱ . اسکالرهای h و k را طوری بیابید که $\mathbf{A} = h\mathbf{B} + k\mathbf{C}$.

۱۲ . تصویر برداری $\mathbf{C}$ روی $\mathbf{A}$ را پیدا کنید .

۱۳ . مولفهٔ $\mathbf{A}$ در جهت $\mathbf{B}$ را پیدا کنید .

۱۴ . $\cos\alpha$ را درصورتی بیابید که α، زاویهٔ بین $\mathbf{A}$ و $\mathbf{C}$ به رادیان باشد .

در تمرینهای ۱۵ و ۱۶، برای تـابع بـرداری، (آ) قلمرو $\mathbf{R}$ ؛ (ب) $\lim\limits_{t\to 1} \mathbf{R}(t)$ ؛ (پ) $D_t\mathbf{R}(t)$ را پیدا کنید .

۱۵ . $\mathbf{R}(t) = \dfrac{1}{t+1}\mathbf{i} + \dfrac{\sqrt{t} - 1}{t - 1}\mathbf{j}$

۱۶ . $\mathbf{R}(t) = |t - 1|\mathbf{i} + \ln t\,\mathbf{j}$

در تمرینهای ۱۷ و ۱۸ ، dy/dx و d^2y/dx^2 را بدون حذف پارامتر بیابید .

۱۷ . $x = 9t^2 - 1, y = 3t + 1$

۱۸ . $x = e^{2t}, y = e^{-3t}$

در تمرینهای ۱۹ و ۲۰، معادلات خطوط مماس افقی و قائم را یافته ، و سپس نمودار جفت معادلات پارامتری داده شده را رسم کنید .

۱۹ . $x = 12 - t^2, y = 12t - t^3$

۲۰ . $x = \dfrac{2at^2}{1 + t^2}, y = \dfrac{2at^3}{1 + t^2}, a > 0$ (سیزوئید دیوکلس)

۲۱ . هرگاه $\mathbf{R}(t) = \ln(t^2 - 1)\mathbf{i} - 2t^{-3}\mathbf{j}$ ، $\mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}''(t)$ را بیابید .

۲۲ . طول‌قوس‌منحنی به معادلات پارامتری $x = t^2, y = t^3$ از $t = 1$ تا $t = 2$ را بیابید .

۲۳ . طول قوس منحنی $\mathbf{R}(t) = (2 - t)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$ از $t = 0$ تا $t = 3$ را بیابید .

۲۴ . طول قوس منحنی $r = 3\sec\theta$ از $\theta = 0$ تا $\theta = \frac{1}{4}\pi$ را بیابید .

۲۵ . (آ) نشـان دهیـد کـه منحنـی تعریف شده با معادلات پارامتری $x = a\sin t$ و $y = b\cos t$ یک بیضـی است . (ب) اگر s طول قوس بیضی قسمت (آ) باشد ، نشان دهید

$$s = 4\int_0^{\pi/2} a\sqrt{1 - k^2\sin^2 t}\,dt$$

کـه درآن $k^2 = (a^2 - b^2)/a^2 < 1$. این انتگـرال یک **انتگرال بیضوی** نام دارد و صرفا" بـا تـوابع مقدماتی قابل محـاسبه نیست . جداولی موجودند که مقدار این انتگرال را برحسب k بدست می‌دهند .

۲۶ . نمودار معـادلهٔ برداری $\mathbf{R}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j}$ را رسم کرده ، و معادلهٔ دکارتی نمودار را بیابید .

۲۷ . نشان‌دهیدکه‌انحنای منحنی $y = \ln x$ در نقطهٔ (x, y) مساوی $x/(x^2 + 1)^{3/2}$ است . همچنین ، نشـان دهیـد کـه انحنـای ماکزیمم مطلق $2/3\sqrt{3}$ است ، که در نقطهٔ $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\ln 2)$ رخ می‌دهد .

۲۸ . انحنای شاخهٔ هـذلولی تعریف شده با $x = a\cosh t, y = b\sinh t$ را در یک نقطه بیابید . همچنین ، نشان دهید که انحنا در راس ماکزیمم مطلق است .

۲۹ . شعاع انحنای منحنی $x = a(\cos t + t\sin t), y = a(\sin t - t\cos t)$ را در یک نقطه بیابید .

۳۰ . انحنا ، شعاع انحنا ، و مرکز انحنای منحنی $y = e^{-x}$ در نقطهٔ $(0, 1)$ را بیابید .

۳۱ . انحنا و شعاع انحنای‌منحنی $\mathbf{R}(t) = 3t^2\mathbf{i} + (t^3 - 3t)\mathbf{j}$ در نقطه‌ای‌که $t = 2$ رابیابید .

۳۲ . هـرگاه $\mathbf{R}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{i} + e^{-\lambda t}\mathbf{j}$ ، که درآن λ ثابت است ، نشان دهید که $\mathbf{R}(t)$ در معادلهٔ $\mathbf{R}''(t) - \lambda^2\mathbf{R}(t) = \mathbf{0}$ صدق می‌کند .

۳۳ . در بتوچرخزاد چهاربازگشتی $x = a\cos^3 t$ و $y = a\sin^3 t$ ، dy/dx و d^2y/dx^2 را بدون حذف پارامتر بیابید .

۳۴ . ذره‌ای در امتداد یک منحنی به معادلهٔ برداری $\mathbf{R}(t) = 3t\mathbf{i} + (4t - t^2)\mathbf{j}$ در حرکت است . معادلهٔ دکارتی مسیر ذره را بیابید . همچنین ، بردار سرعت و بردار شتاب در $t = 1$ را پیدا کنید .

۳۵ . مولفه‌های مماسی و قائم بردار شتاب را برای ذرهٔ تمرین ۳۴ پیدا کنید .

۳۶ . اگر ذره‌ای در امتداد یک منحنی حرکت کند ، تحت چه‌شرایطی بردار شتاب و بردار

یکهٔ مماس همجهت یا مختلف‌الجهت‌اند؟

در تمرینهای ۳۷ و ۳۸، بـرای منحنی داده شده $\mathbf{T}(t)$ و $\mathbf{N}(t)$ را بیابید، و در $t = t_1$ بخشی از منحنـی و نمایشهای $\mathbf{T}(t_1)$ و $\mathbf{N}(t_1)$ با نقطهٔ شروع در $t = t_1$ را رسم نمایید.

۳۷. $\mathbf{R}(t) = (e^t + e^{-t})\mathbf{i} + 2t\mathbf{j};\ t_1 = 2$

۳۸. $\mathbf{R}(t) = 3(\cos t + t\sin t)\mathbf{i} + 3(\sin t - t\cos t)\mathbf{j},\ t > 0;\ t_1 = \frac{1}{2}\pi$

۳۹. منحنی به معادلات پارامتری $x = 4t,\ y = \frac{1}{3}(2t+1)^{3/2},\ t \geq 0$ مفروض است. معادلات پارامتری با پارامتر طول قوس s را بیابید، که طول قوس از نقطه‌ای که $t = 0$ سنجیده می‌شود. نتیجه را با استفاده از معادلهٔ (۱۰) در بخش ۸.۱۶ امتحان کنید.

۴۰. زاویهٔ ارتفـاعی که یک توپ باید شلیک شود تا به‌ازای یک سرعت فرار معلوم برد ماکزیمم بدست آید را بیابید.

۴۱. گلوله‌ای از یـک تـوپ با سرعت فرار v_0 ft/sec شلیک شده است و زاویهٔ ارتفاع α رادیان است. فرمولی برای ارتفاع ماکزیمم گلوله پیدا کنید.

۴۲. دختری یک توپ را به‌طور افقی از بالای یک صخره به ارتفاع 288 ft و با سرعت‌اولیهٔ 32 ft/sec پرتاب می‌کند. (آ) زمان پرواز، و (ب) فاصلهٔ پای صخره تا نقطهٔ برخورد توپ با زمین را بیابید.

۴۳. به‌کمک آنالیز برداری ثابت کنید اقطار یک متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند.

۴۴. بردار مـوضع $\mathbf{R}(t)$ را درصورتی بیـابید کـه بردار شتاب $\mathbf{A}(t) = t^2\mathbf{i} - \dfrac{1}{t^2}\mathbf{j}$ بوده و $\mathbf{V}(1) = \mathbf{j}$ و $\mathbf{R}(1) = -\frac{1}{4}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$.

۴۵. یک **بروچرخزاد** منحنیی است که توسط نقطه‌ای مانند P بر محیط یک دایره به شعاع b که از خارج یک دایرهٔ ثابت به شعاع a روی آن می‌غلطد رسم می‌شود. اگر مبداء در مرکز دایرهٔ ثابت باشد، $A(a,0)$ نقطه‌ای باشد که در آن نقطهٔ P با دایرهٔ ثابت تماس می‌یـابد، B نقطهٔ تماس متحرک دو دایره بوده، و پارامتر t زاویهٔ AOB باشد، ثابت کنید معادلات پارامتری بروچرخزاد عبارتند از

$$x = (a+b)\cos t - b\cos\frac{a+b}{b}t$$

و

$$y = (a+b)\sin t - b\sin\frac{a+b}{b}t$$

۴۶. در مثلث ABC نقاط D، E، و F بترتیب روی اضلاع AB، BC، و AC اند، و $\mathbf{V}(\overrightarrow{AD}) = \frac{1}{3}\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})$، $\mathbf{V}(\overrightarrow{BE}) = \frac{1}{3}\mathbf{V}(\overrightarrow{BC})$، $\mathbf{V}(\overrightarrow{CF}) = \frac{1}{3}\mathbf{V}(\overrightarrow{CA})$. ثـابـت کنیـــد

$\mathbf{V}(\overrightarrow{AE}) + \mathbf{V}(\overrightarrow{BF}) + \mathbf{V}(\overrightarrow{CD}) = \mathbf{0}$.

در تمرینهای ۴۷ و ۴۸، بـردارهای سرعت و شتاب، مقدار سرعت، و مولفه‌های مماسی و قائم شتاب را بیابید.

۴۷. $\mathbf{R}(t) = \cosh 2t\mathbf{i} + \sinh 2t\mathbf{j}$

۴۸. $\mathbf{R}(t) = (2\tan^{-1} t - t)\mathbf{i} + \ln(1+t^2)\mathbf{j}$