ضرب برداری

دراین بخش نوع دیگر ضرب دو بردار ، به نام ضرب بردار ی را مورد مطالعه قرار می دهیم. بر خلاف ضرب عددی ، حاصل ضرب برداری دو بردار ، خود یک بردار است. نخست تعریف جبری این ضرب را ارائه می دهیم وسپس تعبــیر هندسی آن را می آوریم. توجه داشته باشید که ضرب برداری فقط در R^3 تعریف می شود و در R^2 و R هم به شرطی که زیرفضای R^3 محسوب شوند.

تعریف:

فرض کنیم $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ دو بردار باشند حاصل ضرب برداری

$\vec{a}$ در $\vec{b}$ برداری است به نمایش $\vec{a} \times \vec{b}$ که به صـــــورت زیر تعریف مـی شود.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1\right)$$

★با استفاده از دترمیـــــــــنان مرتبه ۳ راه ساده تری نیز برای به خاطر سپردن

فرمول $\vec{a} \times \vec{b}$ وجود دارد.

این عبارت رامی توان با استفاده از نماد دترمینان مرتبه ۳به صورت زیر نمایش داد.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

مثال:

به ازای بردار های $\vec{a}=(2,-1,3)$ و $\vec{b}=(-1,-2,4)$، بردار های $\vec{a}\times\vec{b}$ و $\vec{b}\times\vec{a}$ را

مشخص کنید.

حل:

قضیه:

اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار و α یک اسکالر باشد، آنگاه

الف) $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$

ب) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

پ) $(\alpha\vec{a})\times\vec{b}=\alpha(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times(\alpha\vec{b})$

ت) $\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)+\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)$

ث) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)+\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$

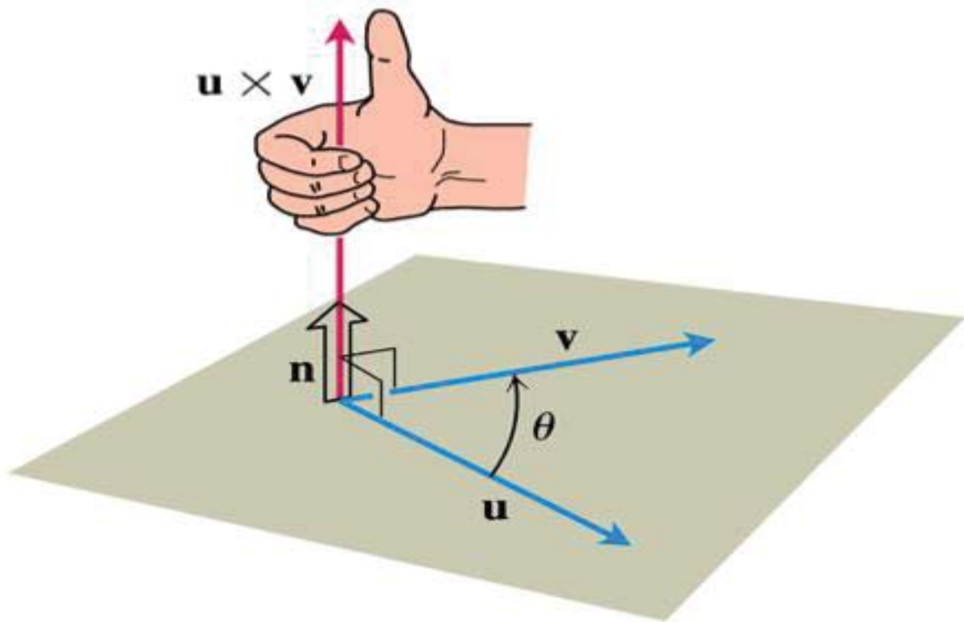
سوال: آیا ضرب خارجی دارای خاصیت شرکت پذیری است؟

قضیه:

اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار ناصفرباشند، آنگاه

الف) $\vec{a}.\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=0$ ، $\vec{b}.\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=0$

درنتیجه اگر $\vec{a}\times\vec{b}\neq 0$ آنگاه $\vec{a}\times\vec{b}$ برهر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است.



ب) اگر θ زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد $(0 \le \theta \le \pi)$ آنگاه

$$\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| = \left\|\vec{a}\right\| . \left\|\vec{b}\right\| \sin\theta$$

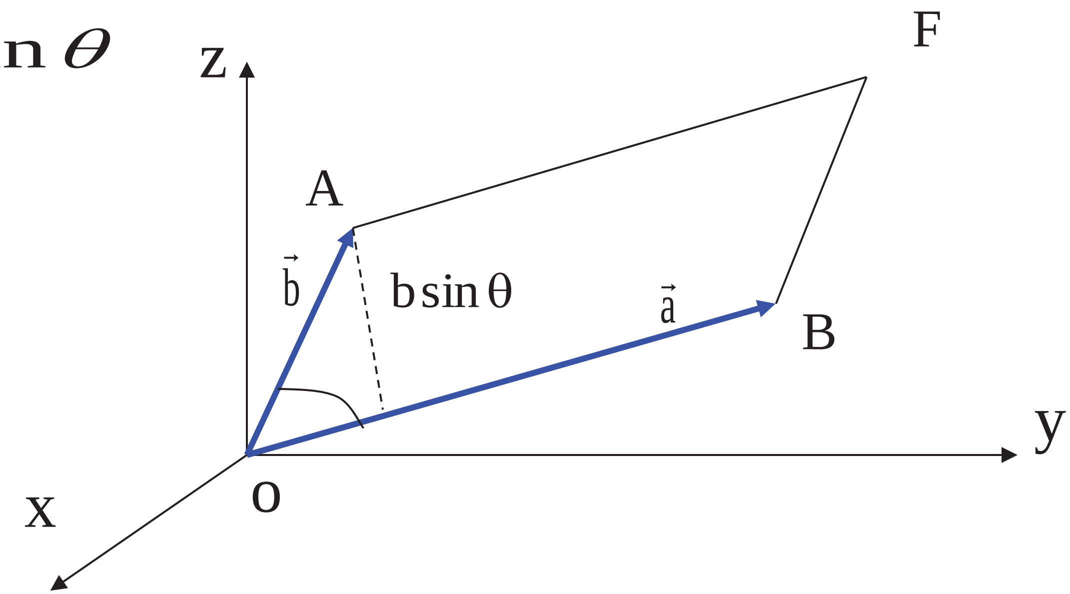
نتیجه:

دو بردار نا صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازیند اگر و تنها اگر $\vec{a} \times \vec{b} = 0$.

تذکر:

شکل زیر نشان می دهد که مساحت متوازی الاضلاع OAFB برابراست با

$$\left\|\vec{a}\right\|.\left\|\vec{b}\right\|\sin\theta$$



درنتیجه   مساحت این متوازی الاضلاع برابر است با

$$\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\| = \left\|\vec{a}\right\|.\left\|\vec{b}\right\|\sin\theta$$

مثال

می خواهیم نشان دهیم که سه نقطه $A(1, 2, 3)$, $B(2, 1, 3)$, $C(3, 1, 2)$ بریک خط نیستند و مساحت مثلث ABC را پیدا کنیم.

تعریف

حاصلضرب $\left|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})\right|$ را حاصلضــــــــــــرب سه گانه مختلط سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ نامیم.

$$\vec{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k \quad ,$$

$$\vec{b} = b_1 i + b_2 j + b_3 k \quad , \qquad \vec{c} = c_1 i + c_2 j + c_3 k \quad ,$$

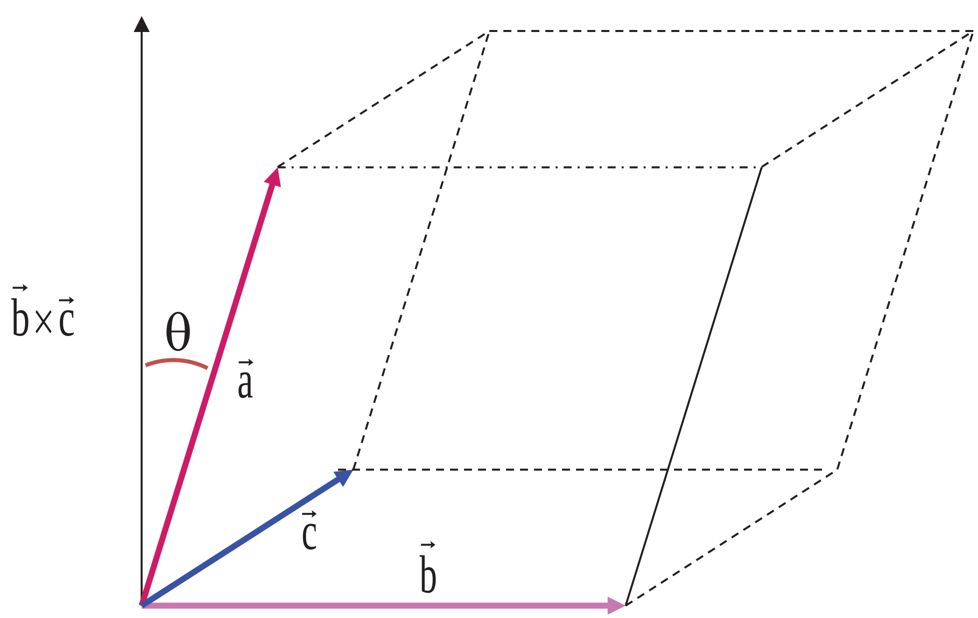
$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

مساله :

نشان دهیدکه $\left|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})\right|$ برابر با حجم متوازی السطوحی است که $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ سه ضلع مجاور آن باشند. سپس حجم متوازی السطوح را به ازای $\vec{a}=(1,-1,0)$ و $\vec{b}=(2,3,-1)$ و $\vec{c}=(-1,0,2)$ حساب کنید.

حل:

اگر θ زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}\times\vec{c}$ باشد،آنگاه ارتفاع متوازی السطوح برابر است با $|\vec{a}|\cos\theta$.



مثال

آیا چهار نقطه $O(0, 0, 0)$, $A(1, 2, 3)$, $B(2, 3, 1)$, $C(3, 2, 1)$ در یک صفحه هستند یا نه؟ در صورت منفی بودن جواب حجم متوازی السطوح تشکیل یافته توسط $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ را تعیین کنید.

خط در فضا

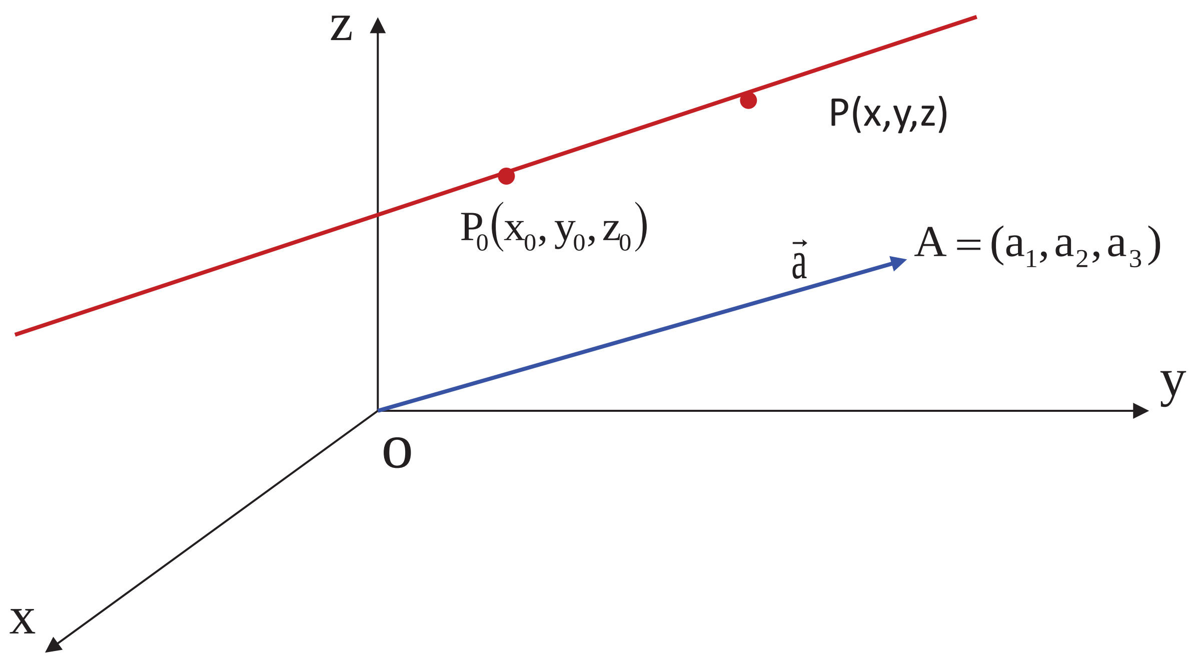
هرخط l در فضا (یادر صفحه) توسط دو نقطه یا یک نقطه و برداری موازی

با l مشخص می شود. درشکل زیر نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ برخط l و بردار

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ موازی باl رسم شده است. درنتیجه نقطه P برخط l است

اگر و تنها اگر اسکالر t وجود داشته باشد به طوری که

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{a}$$



حال اگر $\vec{P} = O\vec{P}$ و $\vec{P}_0 = O\vec{P}_0$ آنگاه $\vec{P} - \vec{P}_0 = P_0\vec{P} = t\vec{a}$

پس

$$\vec{P} = \vec{P}_0 + t\vec{a}.$$

این معادله را معادله برداری خط l می نامیم.این معادله بردار ی معادل است با سه معادله عددی زیر که ازمســـــاوی قراردادن مولفه های دو طرف تساوی فوق به دست آمده است:

$$x = x_0 + ta_1$$

$$y = y_0 + ta_2$$

$$z = z_0 + ta_3$$

✵که درآن $t \in R$. این معادلات را معادلات پارامتری خط l می نامیم و t را یک پارامتر می گوئیم.

مثال:

معادلات متقارن خط l راکه از دو نقطه $P_1(4,-6,5)$ و $P_2(2,-3,0)$ می گذرد تعیین کنید.

حل:

مثال: تصویر و قرینه نقطه $P_0(1,0,2)$ را نسبت به خط $l: \ \frac{x}{1}=\frac{y-2}{3}=z$ به دست آورید.

mk

تذکر:

در معادلات متقارن خط l ،فرض براین است که a_3, a_2, a_1 مخالف صفر

هستند. دراینجا حالت هایی را بررسی می کنیم که یک یا دوتا از این مقـــادیر صفر باشند.

حالت اول:

$a_1 = 0$ ولی a_3, a_2 مخالف صفر باشند. در این صورت خط l موازی با صفحه

yz است و معادلات متقارن آن عبارت اند از

$$x = x_0 \qquad , \qquad \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

حالت دوم:

$a_1 = a_2 = 0$ ولی $a_3 \neq 0$. در این صورت خط l موازی با محور z است.

یعنی lخط قائمی است که از نقطه (x_0, y_0, z_0) می گذرد. معادلات پارامتری آن

عبارتند از $z = z_0 + ta_3$, $y = y_0$, $x = x_0$

و درنتیجه معادلات متقارن آن عبارتند از

$y = y_0$, $x = x_0$

حالت های دیگر شبیه به این دو حالت هستند.

مثال:

معادلات متقارن خط l را که از نقطه $(8,-1,2)$ می گذرد و با بردار $\vec{a}=(2,0,3)$

موازی است، را بیابید.

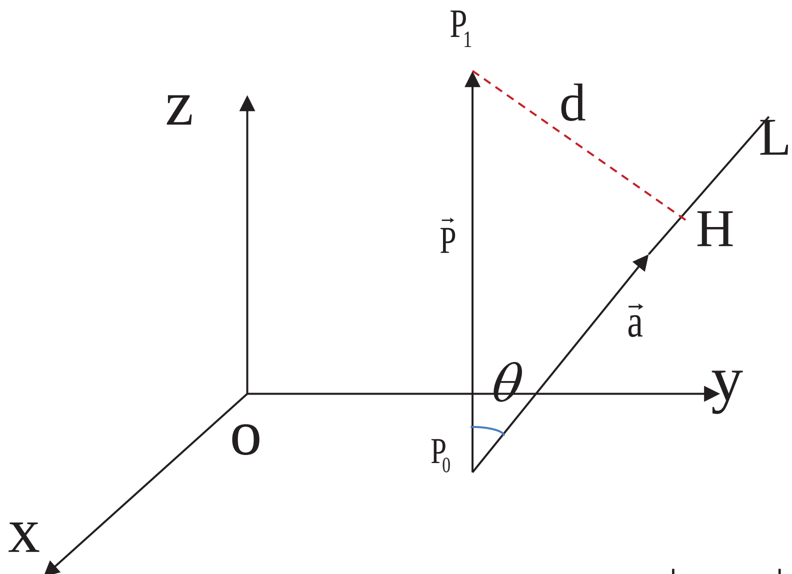
حل:

دراین جا $a_1=2$ ، $a_2=0$ و $a_3=3$. درنتیجه معادلات زیر برای l به دست می آیند:

$$\frac{x-8}{2}=\frac{z-2}{3} \quad , \quad y=-1$$

فاصله نقطه از خط:

فرض کنیم خط l از نقطه P_0 می گذرد و با بردار $\vec{a}$ موازی است. فرض کنیم نقطه P_1 بر l قرار ندارد.



در این صورت

$$d=\left|P_1H\right|=\left|P_0\vec{P}_1\right|\sin\theta$$

چون $\left|\vec{a}\times P_0\vec{P}_1\right|=\left|\vec{a}\right|\left|P_0\vec{P}_1\right|\sin\theta$ ، پس

$$d=\frac{\left|\vec{a}\times P_0\vec{P}_1\right|}{\left|\vec{a}\right|}$$

مثال

فاصله نقطه $P_0(1,3,2)$ از خط l با معادله های دکارتی زیر را پیدا می کنیم.

$$l: \quad \frac{x-3}{-2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{1}$$

حل:

نقطه $P(3, 1, -2)$ را بر این خط انتخاب می کنیم. داریم

$$\overrightarrow{P_0P} = 2i - 2j - 4k$$

چون امتداد خط l بردار $\overrightarrow{OA} = -2i + 2j + k$ است، پس فاصله P از l عبارت است از

$$P_0H = \frac{\left|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{P_0P}\right|}{\left|\overrightarrow{OA}\right|} = \frac{|-6i - 6j|}{\sqrt{9}} = \frac{6\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}$$

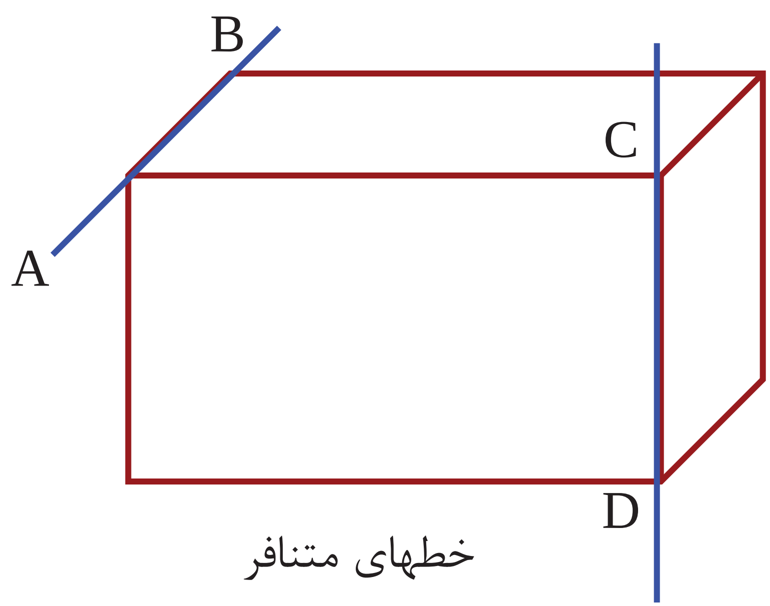
تعریف:

دو خط L و L' را **متنافر** می نامیم اگر منطبق ، موازی و متقاطع نباشند.

مثال:

در یک مکعب مستطیل یالهایی وجود دارند که خطها ی شامل آنها متنافرند.

در شکل زیر خط هایی که شامل پاره خطهای AB و CD هستند، متنافرند.



خطهای متنافر

قضیه

خطهای l و l' با امتدادهای به ترتیب $\overrightarrow{OA}=ai+bj+ck\,,\ \overrightarrow{OB}=a'i+b'j+c'k$

موازی اند یا منطبق اند اگر وتنها اگر شرط زیر برقرار باشد.

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

از قضیه فوق نتیجه می شود که یک شرط لازم برای تقاطع یا تنافر دو خط

l و l' مذکور در قضیه فوق این است که یکی از شرایط

الف) $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$

ب) $\dfrac{a}{a'}\neq\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$

ج) $\dfrac{a}{a'}\neq\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$

برقرار باشد.

✵در برخی از مثالهای زیر هیچ یک از این شرایط برای تقاطع یا تنافر دو خط کا فی نیست.

مثال:

الف) به ازای خط های

$$l: \ \frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3} \qquad , \qquad l': \ \frac{x-1}{2}=\frac{y}{4}=\frac{z-3}{6}$$

$$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}'}=\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{b}'}=\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{c}'}=\frac{1}{2}$$

بنابراین l و l' موازی یا منطبق اند نقطه $(1, 2, 3)$ از l در معادله های l' صدق نمی کند. پس l و l' موازی اند و منطبق نیستند.

ب) امتداد خطهای

$$l:\ \frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3} \qquad , \qquad l':\ \frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{2z}{9}$$

در شرط

$$\frac{1}{2}\neq\frac{2}{3}=\frac{3}{9/2}$$

صدق می کند. بنابراین این خطها موازی یا منطبق نیستند و نشان می دهیم که متقاطع اند.برای این منظور معادله های پارامتری خطها را در نظر می گیریم.

$$l:\quad x=t,\quad y=2t,\quad z=3t$$

$$l':\quad x=1+2s,\quad y=3s,\quad z=\frac{9}{2}s$$

اگر l و l' متقاطع باشند ، عددهای t وs وجود دارند به طوری که

$$\begin{aligned} t &= 1+2s \\ 2t &= 3s \\ 3t &= \frac{9}{2}s \end{aligned}$$

از این معادله ها به دست می اوریم $s = -2$, $t = -3$. بنابراین $P(-3, -6,-9)$ نقطه تقاطع است.

پ) به ازای خطهای

$$l: \ \frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}, \qquad l': \ \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{4}$$

شرط $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ بر قرار است. اگر این خطها متقاطع باشند باید دستگاه

$$\begin{aligned} t &= 2s \\ 2t &= 3s \\ 3t &= 1+4s \end{aligned}$$

جوابی منحصر به فرد داشته باشد. از دو معادله اول نتیجه می شود که $s = t = 0$

ولذا از معادله سوم نتیجه می شود $t = 1/3$ که تناقض است لذا خطهای فوق متنافرند.

ت) ملاحظه می کنیم که خطهای

$$l: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \qquad , \qquad l': \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$$

در نقطه $O(0, 0, 0)$ متقاطع اند. در مورد این دو خط داریم

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

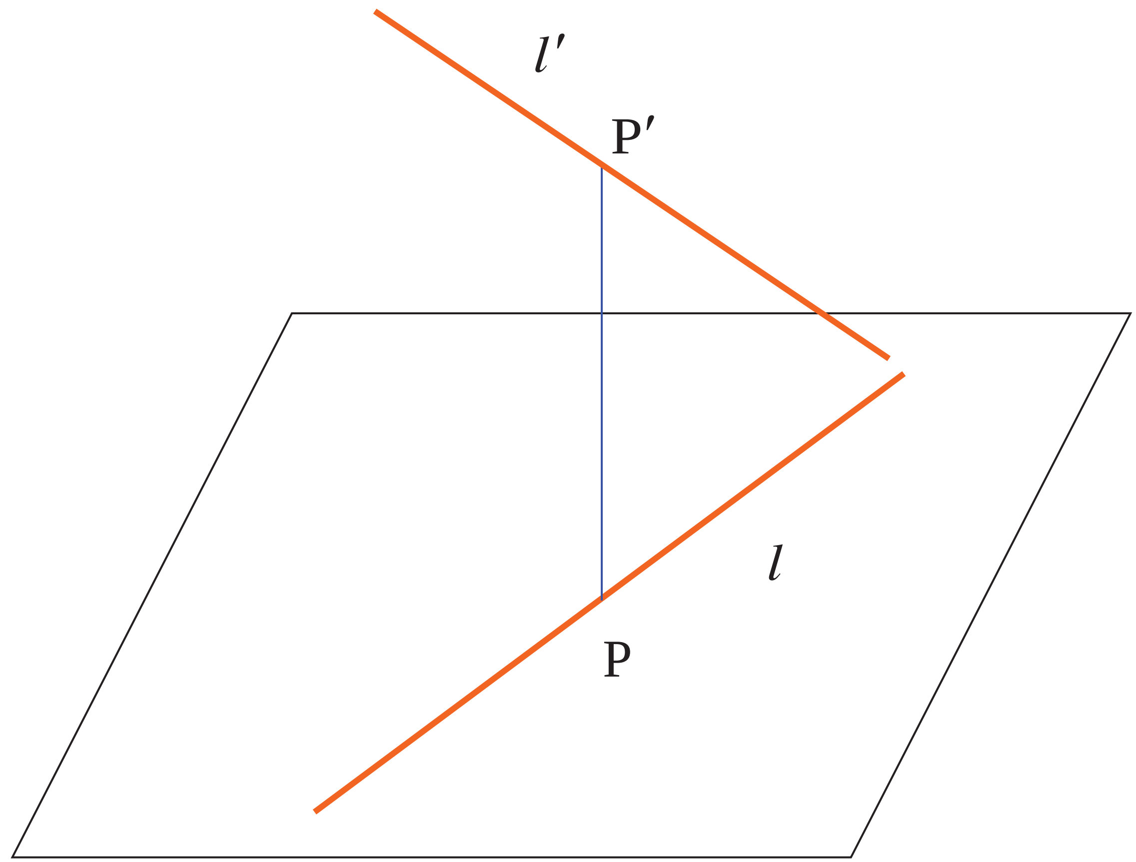
شرط متنافر بودن دو خط:

خطهای l و l' با امتدادهای OA و OA' **متنافرند** اگر نقطه های P و P' به ترتیب نقاط دلخواه بر l و l' باشند به طوری که بردارهای $\vec{PP'}, \vec{OA'}, \vec{OA}$ یک کنج تشکیل دهند، یعنی

$$\vec{PP'}.(\vec{OA}\times\vec{OA'}) \neq 0$$

عمود مشترک دو خط متنافر:

خطی که دو خط متنافر را قطع کند و بر هر دو عمود باشد، عمود مشترک آنها نامیده می شود. اگر عمود مشترک خطهای l و l' این خطها را به ترتیب در نقطه های P و P' قطع کند ، طول پاره خط PP' و یا طول بردار $\vec{PP'}$ را طول عمود مشترک خطهای l و l' می نامیم. گاهی این طول را فاصله دو خط l و l' نیز می نامیم. در واقع P و P' نزدیکترین نقاط روی l و l' هستند. هر گاه Q و Q' نقاط دلخواهی به ترتیب روی l و l' باشند، طول عمود مشترک آنها از رابطه زیر به دست می آید.



$$d = |pp'| = \frac{\left| QQ' . \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OA'} \right|}{\left| \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OA'} \right|}$$

مثال:

طول عمود مشترک خط های l و l' با معادله های دکارتی زیر را پیدا می کنیم.

$$l: \frac{x+4}{2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z+1}{2} \quad , \quad l': \frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-4}{5}$$

حل:

امتداد های این خطها عبارت اند از

$$\vec{OA}=2i-j+2k \quad , \quad \vec{OA}'=4i-3j+5k$$

حال نقطه های P(-4, 4,-1) و $P'(1,-2,4)$ را به ترتیب بر l و l' انتخاب می کنیم داریم

$$\vec{PP}'=5i-6j+5k \quad , \quad \vec{OA}\times\vec{OA}'=i-2j-2k$$

$$\vec{PP}'.(\vec{OA}\times\vec{OA}')=5+12-10=7 \quad , \quad \left|\vec{OA}\times\vec{OA}'\right|=\sqrt{1+4+4}=3$$

در نتیجه طول عمود مشترک برابر است با

$$d=\frac{\left|\vec{PP}'.\vec{OA}\times\vec{OA}'\right|}{\left|\vec{OA}\times\vec{OA}'\right|}=\frac{7}{3}$$

صفحه در فضا

روشن است که تنها یک صفحه وجود دارد که از نقطه Pمی گذرد وبر خط l (یا بر برداری چون $\vec{N}$ عموداست.درنتیجــه هر صفحه توسط یک نقطه ویک بردار عمـــود بردار آن مشخص مـــی شود . فرض کنیـــم $P_0(x,y,z)$ یـــک نقطه و $\vec{N}=(a,b,c)$ یک بردار ناصفر باشد.

اگر صفحه l از P_0 بگذرد و بر $\vec{N}$ عمود باشد ، آنگاه نقطه $P(x,y,z)$ بر این

صفحه است اگر و تنها اگر بردار

$$\vec{P_0P}=\left(x-x_0,y-y_0,z-z_0\right)$$

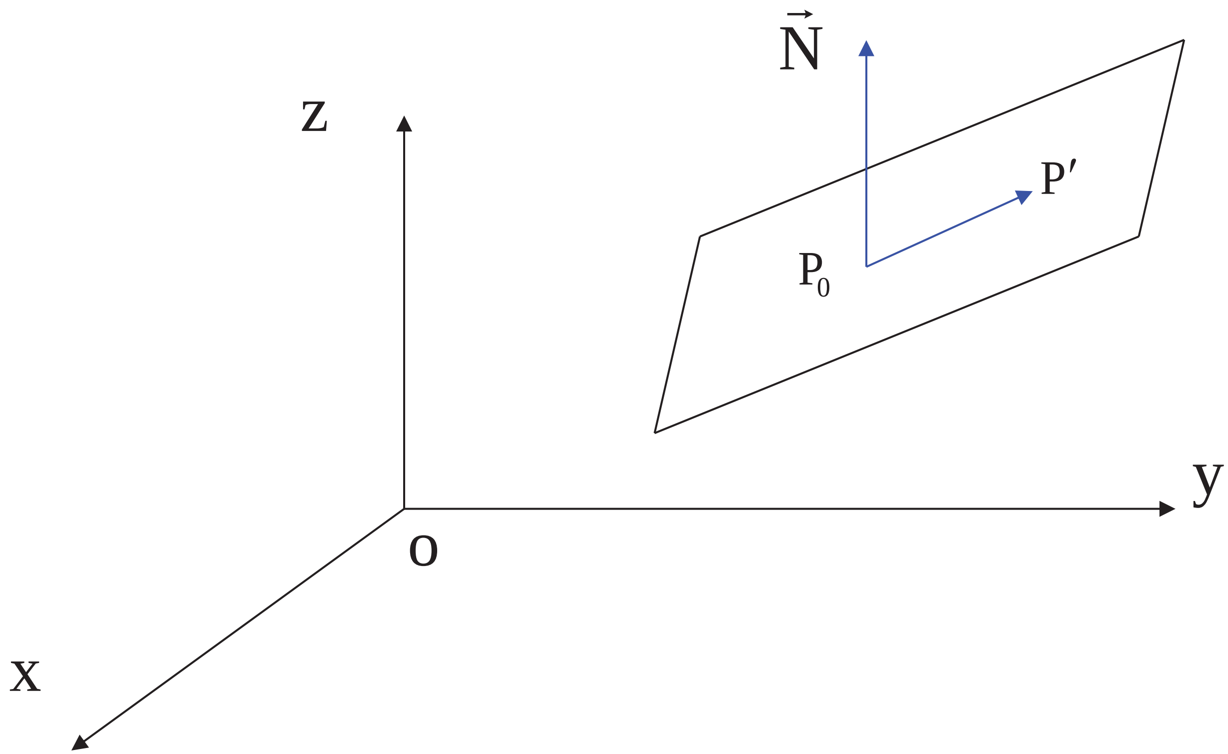
بر بردار $\vec{N}$ عمود باشد . در نتیجه $\vec{N}.\vec{P_0P}=0$ ، یعنی

$$a\left(x-x_0\right)+b(y-y_0)+c(z-z_0\right)=0$$

✵این معادله به صورت

$$ax+by+cz=d$$

نیز می تواند نوشته شود که درآن $d=ax_0+by_0+cz$.



هریک از معادلات بالا را معادله صفحه ای که از P_0 می گذرد و بر بردار $\vec{N}$

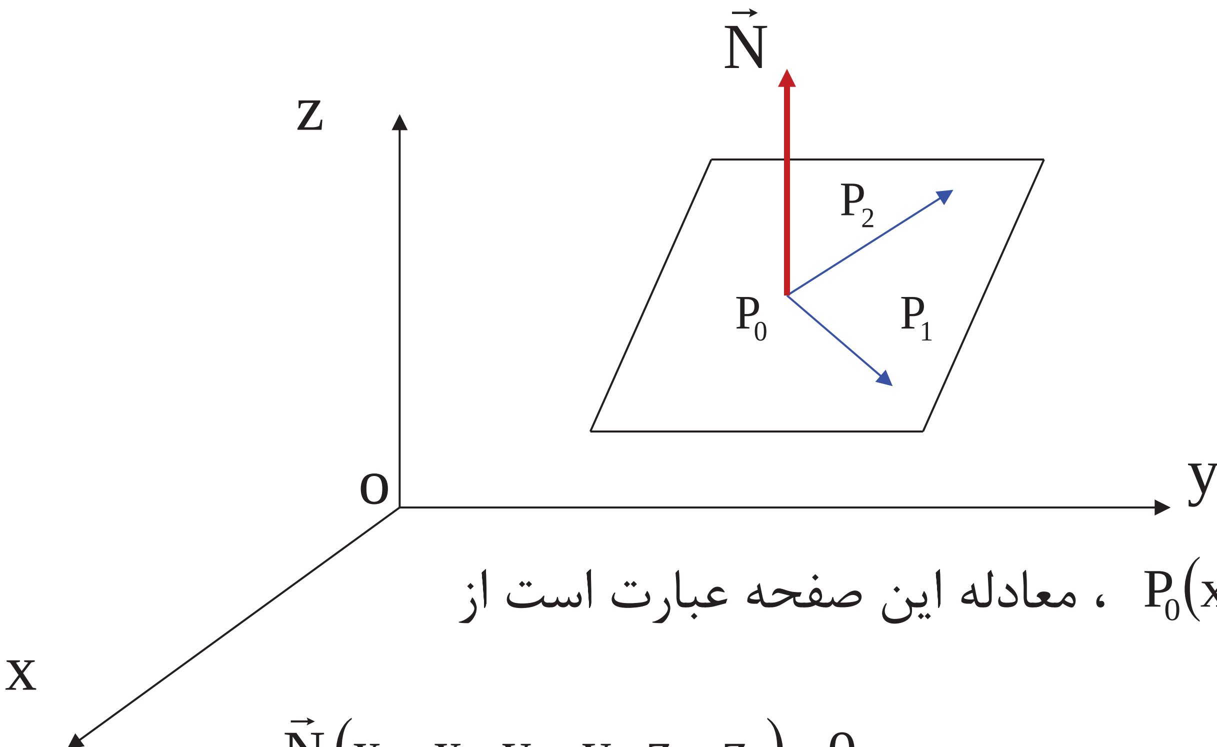
عمود است، می نامیم.بردار $\vec{N}$ را بردار قائم (یا نرمال) صفحه می خوانیم.

مثال:

معادله صفحه ای را بنویسید که از سه نقطه P_0، P_1 و P_2 غیر واقع بر یک خط، بگذرد.

حل:

روشن است که بردار $\vec{N}=\overrightarrow{P_0P_1}\times\overrightarrow{P_0P_2}$ نرمال بردار این صفحه است.



بنا براین اگر $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ، معادله این صفحه عبارت است از

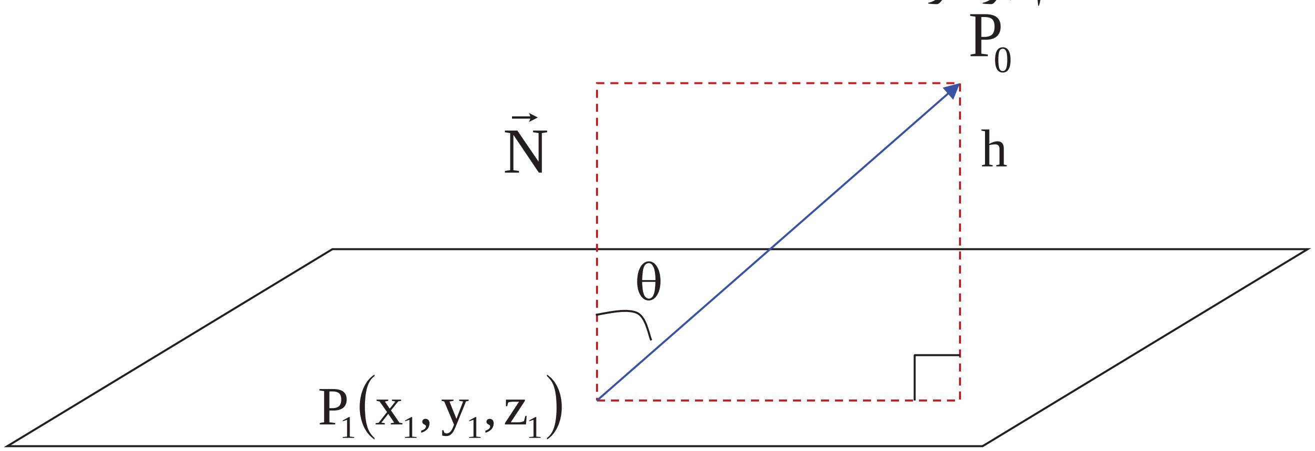
$$\vec{N}.(x-x_0, y-y_0, z-z_0)=0$$

مثال:

فرمولی برای فاصله نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ از صفحه $ax+by+cz+d=0$ به دست آورید.

حل:

بردار $\vec{N}=(a,b,c)$ قائم بردار صفحه است .



★روشن است که

$$h=\left|\vec{P_0P_1}\right|\left|\cos\theta\right|$$

چون $\vec{N}.\vec{P_0P_1} = |\vec{N}||\vec{P_0P_1}|\cos\theta$ ، پس

$$h = \frac{|\vec{N}.\vec{P_0P_1}|}{|\vec{N}|}$$

از آن جا که $\vec{P_0P_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ و P_1 بردار صفحه واقع است،
پس

$$\vec{N}.\vec{P_0P_1} = a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)$$

$$ax_1 + by_1 + cz_1 - ax_0 - by_0 - cz_0 = -d - ax_0 - by_0 - cz_0$$

درنتیجه

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

مثال: قرینه نقطه $P(1,0,1)$ را نسبت به صفحه $x+2y+z=5$ به دست آورید.

حل:

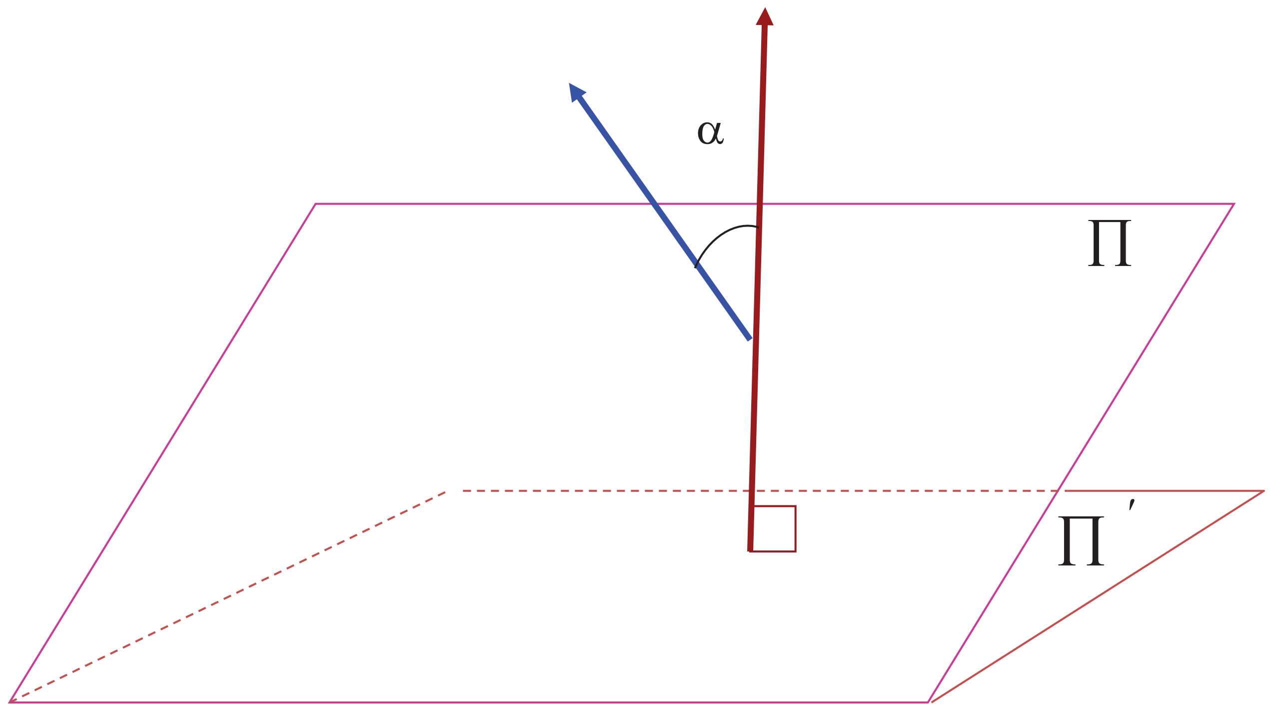
مثال: مساحت مثلث حاصل از تصویر نقاط $A(1,2,0)$، $B(-1,0,1)$ و $C(0,0,3)$ را روی صفحه $\Pi : x+y+z=0$ به دست آورید.

تعریف:

فرض کنیم Π و Π' دو صفحـــــه با بردارهای قائم $\vec{OA} = ai + bj + ck$ و $\vec{OB} = a'i + b'j + c'k$ باشند، زاویه بین بردارهای $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ را **زاویه دو صفحه** Π و Π' می نامیم.

اگراین زاویه α باشد، بنا به تعریف داریم

$$\cos\alpha = \frac{\vec{OA}.\vec{OB}}{|\vec{OA}||\vec{OB}|} \quad , \quad 0 \le \alpha \le \pi$$



زاویه بین دو صفحه

مثال:

می خواهیم زاویه بین دو صفحه Π و Π' را پیدا کنیم:

$$\Pi : x+y+z=1 \quad , \qquad \Pi' : 2x+4y+z=-2$$

حل:

امتدادهای قائم بر این دو صفحه عبارت اند از

$$\overrightarrow{OA} = i + j + k \qquad , \qquad \overrightarrow{OB} = 2i + 4j + k$$

بنابراین

$$\cos\alpha = \frac{2+4+1}{\sqrt{3}\sqrt{4+16+1}} = \frac{7}{\sqrt{3}\sqrt{21}}$$

و لذا داریم

$$\alpha = \cos^{-1}\frac{\sqrt{7}}{3} \qquad ,0 \le \alpha \le \pi$$

مثال: از نقطه $M(1,-1,-1)$ دو صفحه گذرانده ایم طوری که یکی شامل محور x و دیگری شامل محور y باشد. زاویه بین این دو صفحه را به دست آورید.

حل:

تذکر:

دو صفحه

$$\prod : ax+by+cz+d=0 \quad , \quad \prod{}' : a'x+b'y+c'z+d'=0$$

منطبق اند اگر وتنها اگر

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}$$

بنابراین صفحه های Π و Π' با معادله های فوق موازی و نامنطبق اند اگر تنها اگر

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\neq\frac{d}{d'}$$

مثال:

صفحه های $\prod{}' : z=1 \quad , \quad \prod : z=0$

موازی اند ولی منطبق نیستند. در واقع در اینجا

$$a=a'=0 \quad , \quad b=b'=0 \quad , \quad c=c'=1 \quad , \quad d=0\neq d'=-1$$

فاصله دو صفحه موازی:

فاصله دو صفحه موازی $P: ax+by+cz+d=0$ و $P': ax+by+cz+d'=0$

از رابطه زیر به دست می آید:

$$h=\frac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

مثال: معادله صفحه P' موازی صفحه $P: x+2y+2z+5=0$ که فاصله آن با صفحه P برابر 4 می باشد را بنویسید.

توابع برداری یک متغیره

تعریف

تابع $f : A \to R^n$ که در آن $A \subseteq R$ را یک **تابع برداری یک متغیره**

مجموعه A را **دامنه** و مجموعه R^n را **برد** این تابع می نامیم.

f(t) را می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$f(t) = \left(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t) \right)$$

که در آن $f_i : A \to R$ ، $1 \le i \le n$ توابعی حقیقی روی A هستند.

مثال به ازای A = [0,1) تابع $\mathbf{f : A \to R^2}$ با تعریف $\mathbf{f(t) = (\sin 2\pi t , \cos 2\pi t)}$

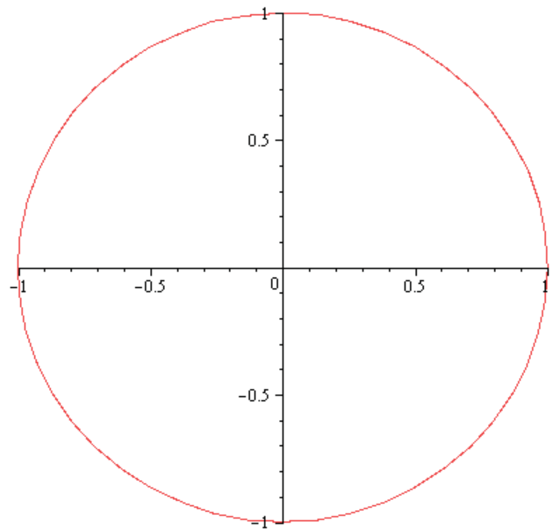
دارای مولفه های $t \in A$ $f_2(t) = \cos 2\pi t$ ، $f_1(t) = \sin 2\pi t$

می باشد.

یعنی دایره واحد $r=1$ و شعاع $O(0,0)$ دایره به مرکز $f(A)$ توجه کنید که

باشد ،آنگاه $f(A)$ است.در واقع اگر $(x,y)\in f(A)$ نقطه دلخواهی متعلق به

$$x^2+y^2=\left(\sin^2 2\pi t+\cos^2 2\pi t\right)=1$$



مثال

تابع $f:R\to R^3$ با تعریف $f(t)=\left(2\cos t,2\sin t,3t\right)$

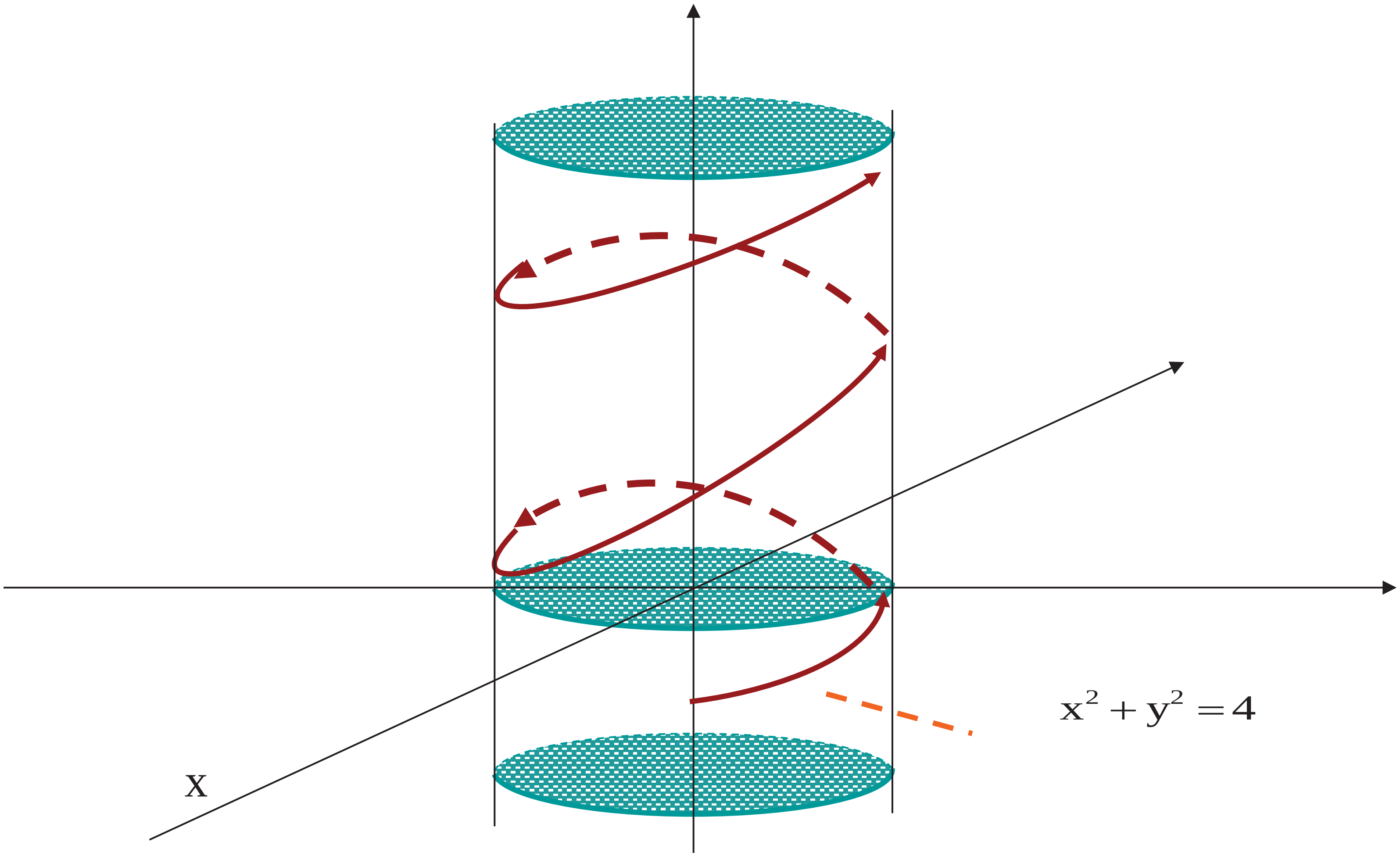
دارای مولفه های $f_3(t)=3t$, $f_2(t)=2\sin t$, $f_1(t)=2\cos t$

است.

مشاهده می کنیم که به ازای هر $t \in R$ ، $x^2 + y^2 = 4$: بنابراین هر نقطه

$f(R)$، روی استوانه قائم $x^2 + y^2 = 4$ واقع است. مجموعه

را یک **پیچوار(هلیکس) مدور** می نامیم. f یعنی نگاره



تعیین دامنه تابع برداری:

هرگاه $r: A \subseteq R \to R^n$ به صورت

$$r(t) = \left(f_1(t)\,,\, f_2(t), \ldots, f_n(t)\right)$$

تعریف شده باشد، دامنه تابع برداری f عبادت است از:

$$D_r = D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap \ldots \cap D_{f_n}$$

مثال: دامنه تابع برداری $r(t) = (\sqrt{t^2 - 1}, \ln(t-2), \frac{\cos(t)}{t})$ را به دست آورید.

تعریف

می گوئیم تابع برداری $f : A \subseteq R \to R^n$ با $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$

در نقطه $t = t_0$ دارای حد $L = (L_1, L_2, \dots, L_n)$ است اگر

$$\lim_{t \to t_0} f_i(t) = L_i \qquad 1 \le i \le n$$

مثال1: حد تابع زیر را در $t = 0$ پیدا کنید:

$$r(t) = \left(\frac{\sin(t)}{t}, \frac{e^{t^2} - 1}{t}, \cos(t)\right)$$

حل:

$$\lim_{t \to 0} r(t) = \left(\lim_{t \to 0} \frac{\sin(t)}{t}, \lim_{t \to 0} \frac{e^{t^2} - 1}{t}, \lim_{t \to 0} \cos(t)\right) = (1,0,1).$$

مثال2: حد تابع زیر را در $t = 1$ پیدا کنید:

$$r(t) = (\ln(t^2), [t])$$

حل:
$$\lim_{t\to 1^-} r(t) = (\lim_{t\to 1^-} \ln(t^2), \lim_{t\to 1^-} [t]) = (0,0).$$
$$\lim_{t\to 1^+} r(t) = (\lim_{t\to 1^+} \ln(t^2), \lim_{t\to 1^+} [t]) = (0,1).$$
بنابراین $r(t)$ در $t=1$ حد ندارد.

تعریف می گوئیم تابع $r: A \subseteq R \to R^n$ در نقطه $t=a$ پیوسته است اگر داشته باشیم:
$$\lim_{t\to a} r(t) = r(a)$$

.

با توجه به تعریف مشاهده می کنیم که تابع r پیوسته است اگر و تنها اگر هر یک از مولفه هایش پیوسته باشد.

مثال

الف) تابع $t \in R$, $f(t)=\left(\sqrt{t^2+1}, \sin t, e^t\right)$ در نقطه $t = 0$ پیوسته است .

حل:

زیرا همه مولفه های f در این نقطه پیوسته هستند.در واقع داریم:

$$\lim_{t\to 0}\sqrt{t^2+1} = \sqrt{1} = 1 \quad , \quad \lim_{t\to 0}\sin t = 0 = \sin 0 \quad , \quad \lim_{t\to 0} e^t = 1$$

ب) تابع $t \neq 0$, $t > -2$, $f(t)=\left(\frac{\sin t}{t}, \ln(2+t)\right)$ درنقطه $t = ٠$ پیوسته نیست.

حل:

زیرا تابع $f_1(t)=\left(\frac{\sin t}{t}\right)$ در نقطه$t = 0$ تعریف نشده است. با وجود این داریم:

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \left(1, \ln 2\right)$$

تعریف

اگر $f:[a,b]\to R^n$ با a<b و $n=2$ یا $n=3$ تابعی پیوسته روی[a,b]باشد ، آنگاه f را یک **خم** در R^2 یا R^3 می نامیم. نگاره f را **اثر** یا **مسیر** خم (و گاه خود خم) و معادلات پارامتری[a,b] f را **معادلات پارامتری** خم می نامیم.

جهت خم همواره از f(a) به سمت f(b) می باشد .

مثال:

تابع $f:[-1,1]\to R^2$ با تعریف :

$$f(t)=\left(|t|,t^2\right)$$

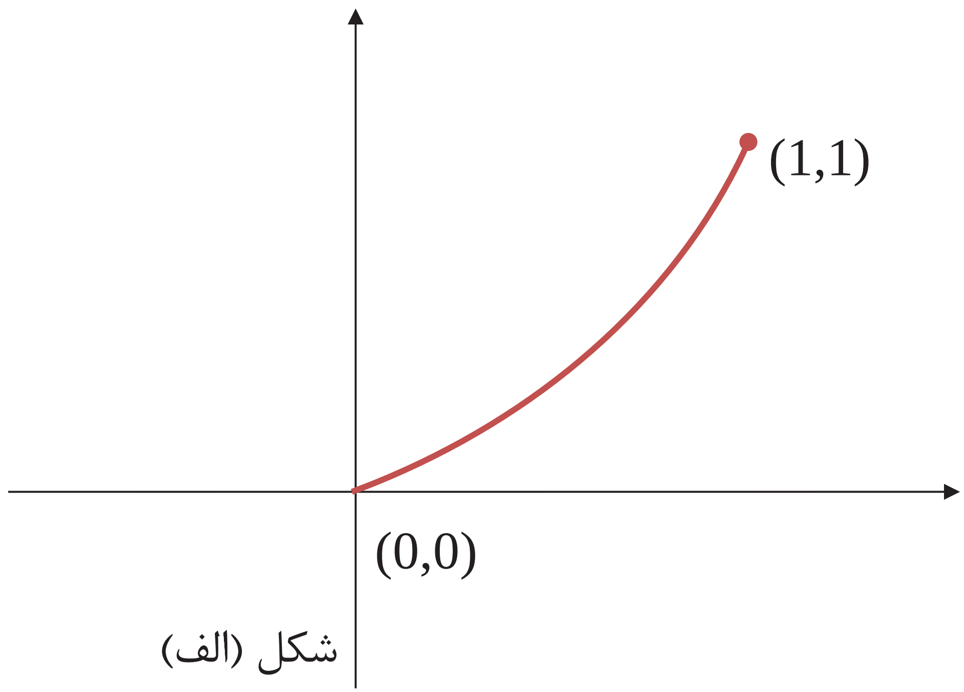
روی [-1, 1] پیوسته و لذا یک خم در R^2 است. معادلات پارامتری این خم عبارت اند از :

$$x=|t| \quad , \quad y=t^2 \quad , \quad t\in[-1,1]$$

اثر این خم یا نگا ره f عبارت است از:

$$\mathbf{f}[-1,1]=\{\mathbf{f}(\mathbf{t})|\mathbf{t}\in[-1,1]\}=\{(|\mathbf{t}|,\mathbf{t}^2)\ \mathbf{t}\in[-1,1]\}$$
$$=\{(x,y)|\ x=|t|\ ,\ y=t^2\ ,\ t\in[-1,1]\}$$
$$=\{(x,x^2)|\ 0\le x\le 1\}$$

در شکل زیر [-1,1] f را رسم کرده ایم.



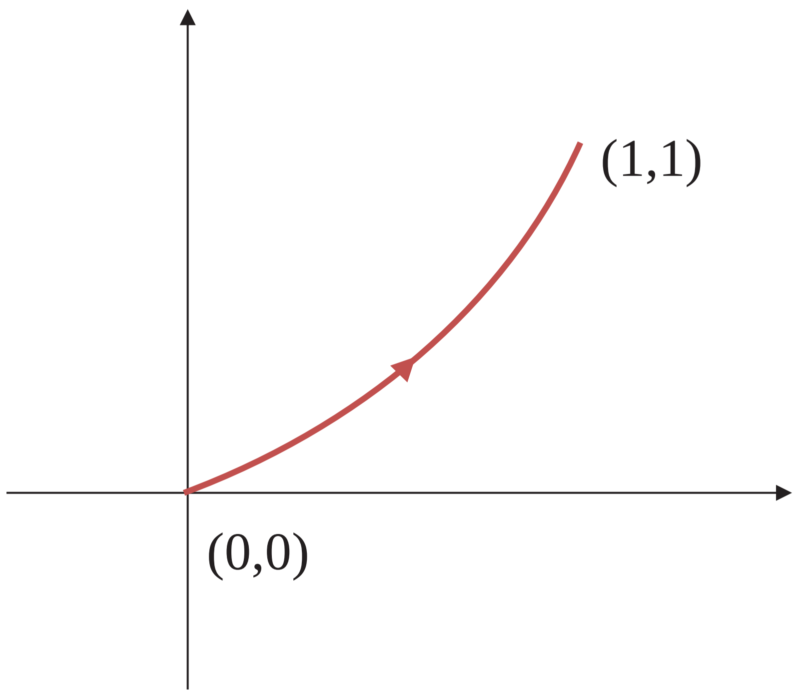
شکل (الف)

توجه کنید که وقتی t از ۱- تا ۰ افزایش می یابد ، نقطه (x,y) اثر خم f را از (1, 1) تا (۰و۰) یک بار می پیماید.همچنین وقتی t از ۰ تا ۱ افزایش یابد نقطه (x,y) اثر خم f را از (0,0) تا (1,1) مجدداً طی می کنند. بنابراین هریک از دسته معادله های

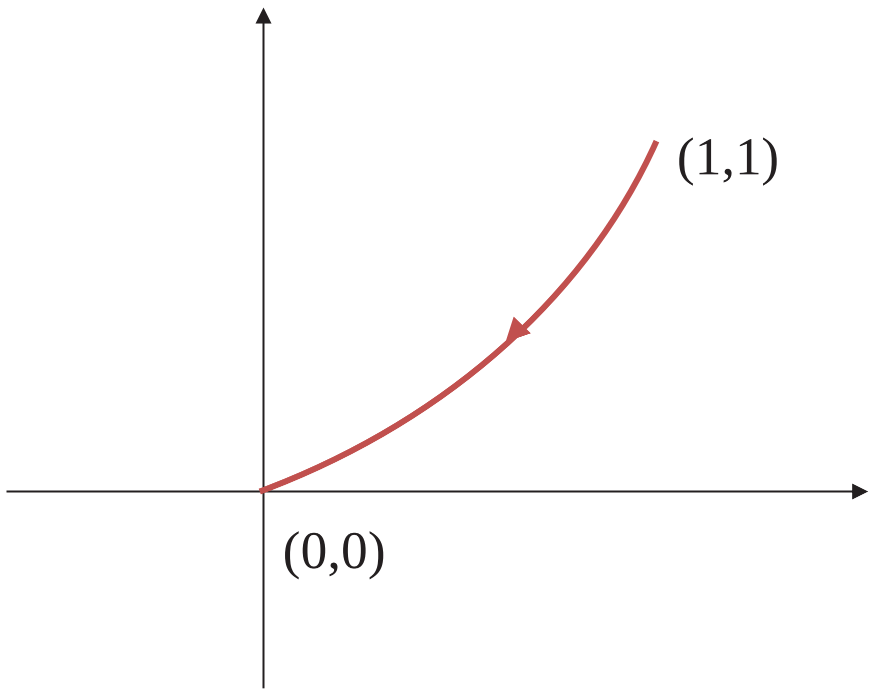
$$x = -t \quad , \quad y = t^2 \quad t \in [-1,0]$$ ❊

$$x = t \quad , \quad y = t^2 \quad t \in [0,1]$$ ❊❊

معادلات پارامتری خم واحدی هستند. در شکل (ب) خم مذکور با معـادلات پارامتری ❊ ودر شکل (پ) خم مذکور با معادلات پارامتری ❊❊ نشـــان داده شده اند.در این شکل ها پیکانها جهت حرکت نقطه (x,y) روی خم را نشـــان می دهند.



شکل (ب)



شکل (پ)

تعریف

می گوئیم تابع برداری $f:[a,b]\to R^n$ در نقطه $t\in[a,b]$ **مشتق پذیر** است اگر

$$\lim_{x\to t}\frac{1}{x-t}\big(f(x)-f(t)\big)$$

وجود داشته باشد. درصورتی که f در نقطه t مشتقپذیر باشد،حد فوق را **مشتق f** در نقطه t

می نامیم وآن را با $f'(t)$ یا $\frac{df}{dt}(t)$ نشان می دهیم.

مشتق چپ و راست f در نقطه t=a را به ترتیب با $f'(a^-)$ و $f'(a^+)$ نشان

می دهیم.

$$f'(a^+)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\qquad f'(a^-)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

بنابراین f در نقطه t **مشتق□پذیر** است اگر وتنها اگر مولفه های آن در این نقطه مشتقپذیر باشند

مثال

مشتق تابع $f(x)=\left(e^{1-x^2}\ ,\ \ln x\ ,\ \int_{x}^{x^2}\cos(\pi t)dt\right)$ را در نقطه $\mathrm{x}=\frac{1}{2}$ پیدا می کنیم.

حل:

قضیه:(قواعد مشتق گیری)

$$\phi:[a,b]\to R,$$

$$g,f:[a,b]\to R^n,\alpha,\beta\in R$$

$$((\alpha f+\beta g))'(t)=\alpha f'(t)+\beta g'(t)$$

$$(f.g)'(t)=f'(t).g(t)+f(t).g'(t)$$

$$(f\times g)'(t)=f'(t)\times g(t)+f(t)\times g'(t)$$

$$(\phi f)'(t)=\phi'(t)f(t)+\phi(t)f'(t)$$

مثال:

$$f(t)=(\sqrt{t+1},t^2-1,2t),\ g(t)=(\frac{2t}{t^2+1},\frac{t^2-1}{t^2+1},2t)$$

$$\phi(t)=\ln(2t+1),(f.g)'(0)=?,(f\times g)'(0)=?,(\phi f)'(0)=?$$

حل:

$$f(0)=(1,-1,0),\ g(0)=(0,-1,0),\ \phi(0)=0$$

$$g'(x)=\left(\frac{2(t^2+1)-4t^2}{(t^2+1)^2},\frac{2t(t^2+1)-2t(t^2-1)}{(t^2+1)^2},2\right)$$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{2\sqrt{t}},2t,2\right),\ \phi'(t)=\frac{2}{2t+1}$$

$$f'(0)=\left(\frac{1}{2},0,2\right),\ g'(0)=(2,0,2),\ \phi'(0)=2$$

$$(f\times g)'(0)=f'(0)\times g(0)+f(0)\times g'(0)$$

ادامه حل:

$$(f\times g)(0)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=(2,0,\frac{-1}{2})+(-2,-2,2)=(0,-2,\frac{3}{2})$$

$$(\varphi f)'(0)=\varphi'(0)f(0)+\varphi(0)f'(0)=2(1,-1,0)=(2,-2,0)$$

مثال:مشتق تابع زیر را در نقطه t=1 بیابید:

$$h(t)=(\cos(2+\ln t),2+\ln t,(2+\ln t)^4)$$

حل:

$$h'(t)=(-\frac{1}{t}\sin(2+\ln t),\frac{1}{t},4\frac{1}{t}(2+\ln t)^3)$$

$$h'(1)=(-\sin 2,1,32)$$

تعریف انتگرال تابع برداری:

$$f:[a,b]\to R^n \quad , \qquad f(t)=\left(f_1(t), f_2(t),\dots, f_n(t)\right)$$

را به صورت $\int_a^b f(t)dt$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\int_a^b f(t)dt=\left(\int_a^b f_1(t)dt, \int_a^b f_2(t)dt,\dots, \int_a^b f_n(t)dt\right)$$

و انتگرال نا معین:

$$\int f(t)dt=\left(\int f_1(t)dt, \int f_2(t)dt,\dots, \int f_n(t)dt\right)$$

مثال: هرگاه $f(t)=(\sec(t), \tan(t), t, 2t^3\cos(5t))$ مطلوب است

$$\int f(t)dt=?$$

تعریف: خم $f:[a,b]\to R^n$

را روی [a,b] **هموار** می نامیم اگر به ازای هر $t\in[a,b]$ ، $f'(t)$ وجود داشته،

روی [a,b] پیوسته باشد.

و به ازای هر t ، $|f'(t)|\neq 0$.

و بنا براین خم f همواره روی (a,b) هموار است اگر وتنها اگر در هر نقـــطه مشتق یکی از مولفه های f غیر صفر باشد.

مثال

الف) خم $f(t)=\left(|t|,\ln(1+t),(1+t^2)\right)$ روی [-1, 1] هموار نیست ، زیرا در نقطه t = 0 مولفه اول آن مشتقپذیر نیست.

ب) خم زیر روی [0,1] هموار است.

$$f(t)=\left(\sin t,\sin t,t^2+1\right)$$

تعریف خم پاره ای هموار:

خم $f:[a,b]\to R^n$ را پاره ای هموار نامند اگر در تعداد متناهی نقطه از دامنه هموار نباشد.

به عبارت دیگر خم f پاره هموار است اگر نقطه های $t_1,t_2,\ldots,t_n\in[a,b]$ وجود داشته باشند به طوری که در این نقطه ها یا مشتق نداشته باشد یا در شرط $|f'(t)|=0$ صدق کند.

ولی دربقیه نقاط [a,b] در شرط $|f'(t)|\neq 0$ صدق کند.

مثال: خم $f(t)=(t^2,t^2,t^4)$ در نقطه t=0 هموار نیست، زیرا:

$$|f'(0)|=0$$

- تعریف طول خم: فرض کنید $f:[a,b]\to R^n$ خمي هموار باشد، طول اين خم را با s نشان مي دهيم و با رابطه زير تعریف می کنیم:

$$s=\int_a^b |f'(t)|dt$$

تعمیم تعریف طول خم: اگر f در نقاط زیر پاره هموار باشد

$t_1, t_2, \ldots, t_n \in [a,b]$

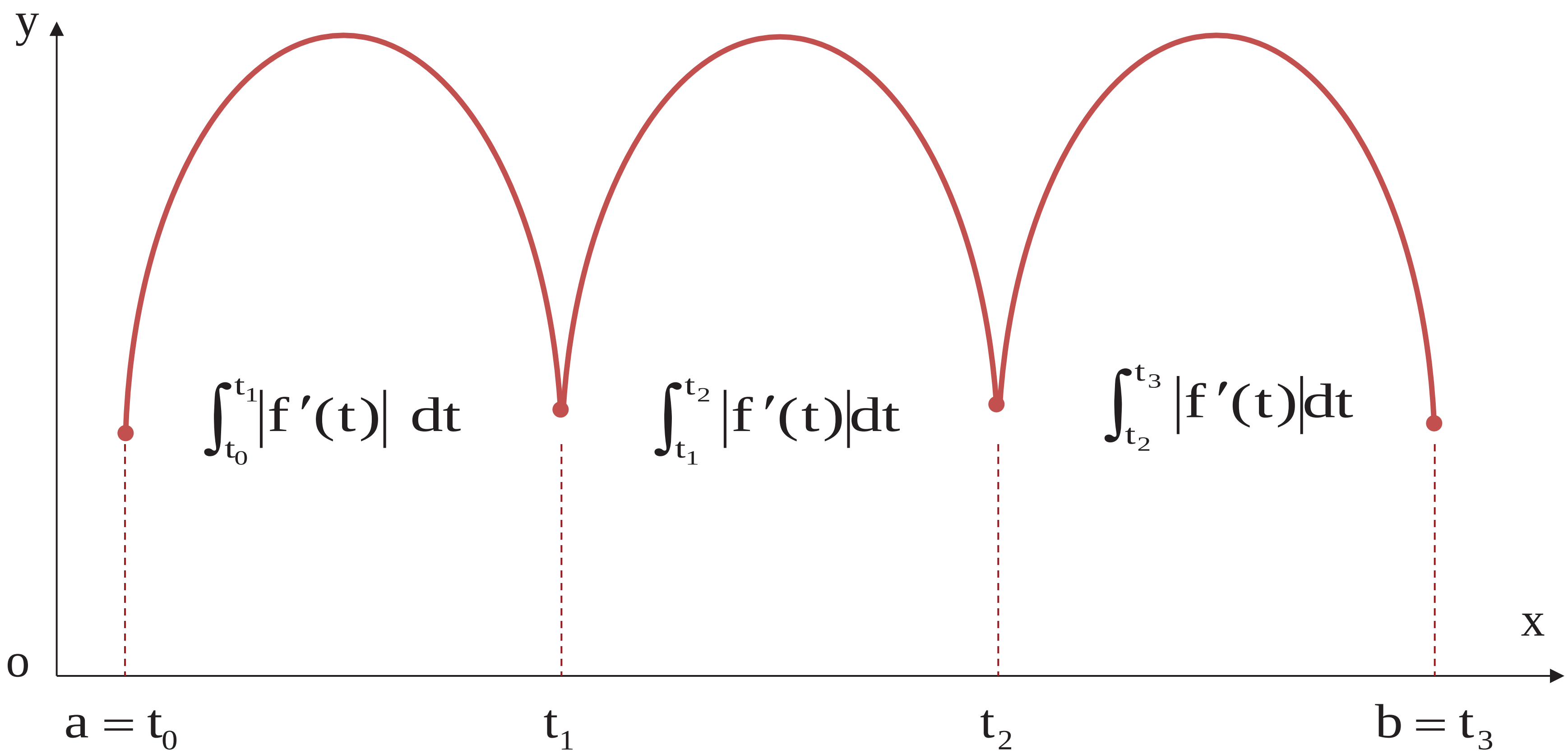
و $a \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n \le b$ طول f را با رابطه زیر تعریف میکنند:

$$s = \int_a^{t_1} |f'(t)|dt + \int_{t_1}^{t_2} |f'(t)|dt + \ldots + \int_{t_n}^{b} |f'(t)|dt$$

با قراردادن $a = t_0, b = t_{n+1}$ این فرمول بصورت زیر در میآید:

$$s = \sum_{i=0}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |f'(t)|dt$$

نمودار یک خم تکه ای هموار:



طول خم پاره هموار

مثال:

الف) طول خم

$$f(t) = (t, t^2) \qquad t \in [0,1]$$

مساوی است با

$$\int_0^1 \sqrt{1+(2t\ \ )^2}\,dt = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\,dt = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$$

ب) خم

$$f(t) = (\cos t, \sin t) \qquad t \in [0, \pi]$$

هموار است و طول آن مساوی است با

$$\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = \int_0^{\pi} dt = \pi$$

مشاهده می کنیم که طول خم تابعی از پارامتر تعریف کننده خم نیز هست،

یعنی اگر $a \le t \le b$ آنگاه

$$s(t) = \int_a^t \left| f'(\eta) \right| \, d\eta$$

چون $\left| f'(\eta) \right|$ تابعی پیوسته روی $[a,b]$ است، پس s تابعی مشتقپذیر از t است

و داریم

$$\frac{ds(t)}{dt} = \left| f'(t) \right| = \left| \frac{df}{dt} \right|$$

در نتیجه

$$\left| \frac{df}{ds} \right| = 1$$

با توجه به این پدیده تعریف زیر را داریم.

تعریف :

می گوئیم خم

$f:[a,b]\to R^n$ $\qquad$ $n=2$ یا 3

$$f(s)=\left(f_1(s),f_2(s),f_3(s)\right)$$ یا $$f(s)=\left(f_1(s),f_2(s)\right)$$

توسط طول خم **پارامتری** شده است اگر

$$\left|\frac{df}{ds}\right|=1$$

البته با توجه به قاعده زنجیری، اگر t پارامتر دیگری برای خم باشد، داریم

$$\frac{df}{ds}=\frac{df}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=f'(t)\frac{dt}{ds}=\frac{f'(t)}{\frac{ds}{dt}}$$

$$\frac{df}{ds}=\frac{f'(t)}{|f'(t)|}$$

مثال

الف) پیچوار

$$f(t)=(a\cos t, a\sin t, bt) \qquad t\in R$$

رانسبت به طول خم پارامتری می کنیم.

حل:

طول خم در بازه [0,t] عبارت است از

$$s(t)=\int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\,d\eta=\sqrt{a^2+b^2}\,t$$

$$s(t)=\int_{-t}^0 \sqrt{a^2+b^2}\,d\eta=\sqrt{a^2+b^2}\,t$$

واز این رو ، در هر دو مورد داریم

$$t=\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

حال این مقدار t را در تعریف f قرار می دهیم و به دست می آوریم.

$$f(s)=\left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\ ,\ a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\ ,\ \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),\quad s\geq 0$$

اکنون توجه کنید که با این نمایش طول خم f در بازه [0,s] مساوی است با s و به علاوه

داریم
$$\left|\frac{df}{ds}\right|=1$$

پ) آیا خم

$$f(t)=\left(e^t\sin t\,,e^t\cos t,e^t\right)\qquad\qquad t\in R$$

را می توان با طول خم پارامتری کرد؟

حل:

نقطه $t_0\in R$ را در نظر می گیریم. طول خم از نقطه $f(t_0)$ تا f(t) عبارتست از

$$s(t)=\int_{t_0}^{t}|f'(\eta)|\ d\eta=\int_{t_0}^{t}e^{\eta}\sqrt{3}d\eta=\sqrt{3}(e^t-e^{t_0})$$

بنابراین t تابعی از s است و داریم

$$\mathbf{t} = \ln\left(\frac{\mathbf{s}}{\sqrt{3}} + \mathbf{e}^{\mathbf{t}_0}\right) \qquad \text{یا} \qquad \mathbf{e}^{\mathbf{t}} = \frac{\mathbf{s}}{\sqrt{3}} + \mathbf{e}^{\mathbf{t}_0}$$

در نتیجه خم را می توان توسط s پارامتری کرد و مولفه های آن را به صورت زیر به دست آورد.

$$f_1(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + e^{t_0}\right)\sin\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + e^{t_0}\right)\right) \quad , \quad s \geq 0$$

$$f_2(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + e^{t_0}\right)\cos\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + e^{t_0}\right)\right) \quad , \quad s \geq 0$$

$$\mathbf{f}_3(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{s}}{\sqrt{3}} + \mathbf{e}^{\mathbf{t}_0} \qquad , \quad \mathbf{s} \geq 0$$

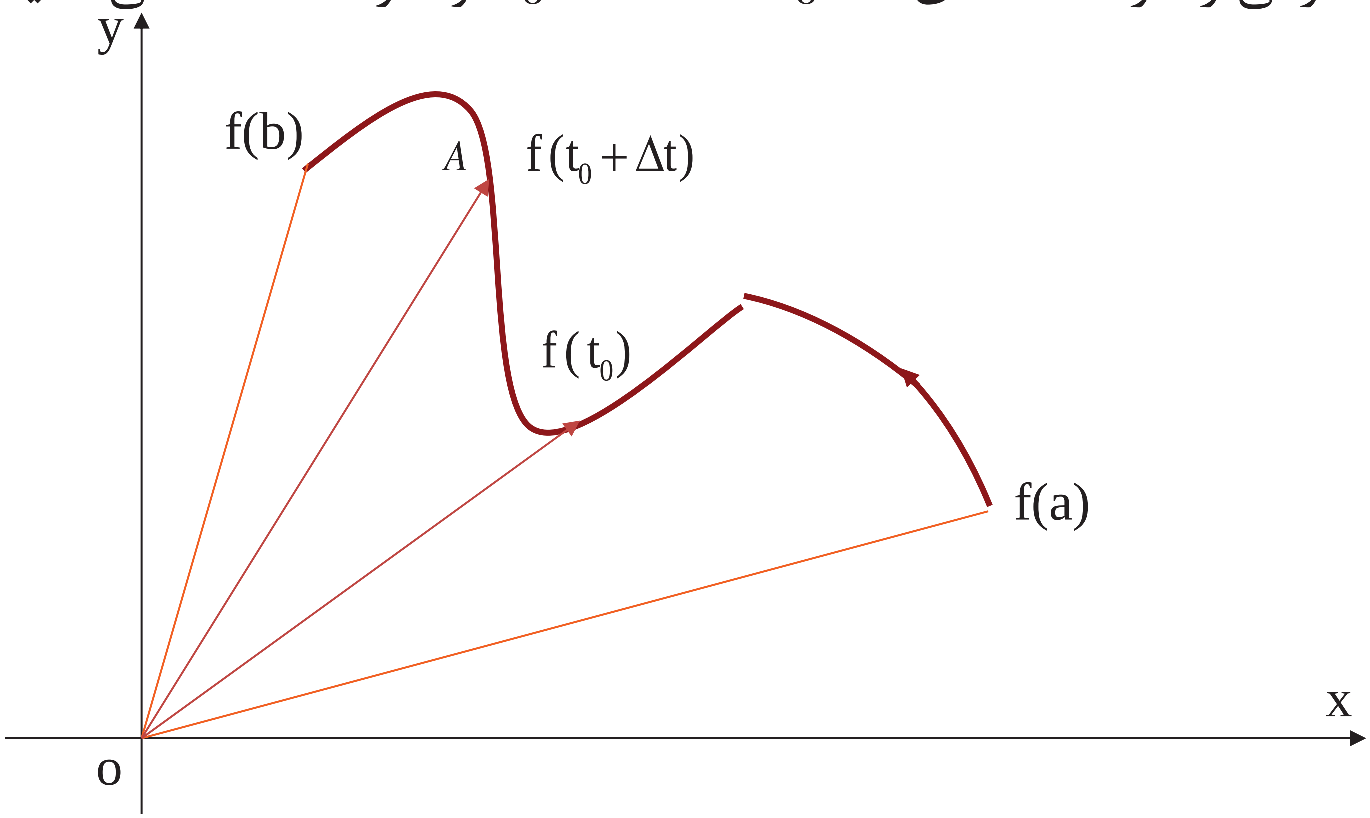
توجه کنید که با انتخاب $t_0 = 0$ این مولفه ها صورت ساده تری به خود می گیرند.

حرکت در صفحه

تعریف

بردار OA را شعاع حامل متحرک در لحظه t می نامیم ، در شکل زیر مسیر

متحرکی را در لحظه های t_0 , $t_0 + \Delta t$ و a و b مشاهده می کنید.



تعبیر های مشتق:

فرض کنید $f(t)=x(t)i+y(t)j$

مکان متحرکی در لحظه t باشد، در این صورت رابطه

$$f(t+\Delta t)=x(t+\Delta t)i+y(t+\Delta t)j$$

مکان این متحرک در لحظه $t+\Delta t$ خواهد بود. بنابراین

$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

نماینده **بردار سرعت متوسط** در بازه زمانی از t تا $t+\Delta t$ است. در نتیجه در صورتی که حد

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

وجود داشته باشد، برابربا بردار سرعت در لحظه t خواهد بود.

با توجه به این مطلب اگر سرعت متحرک در لحظه t را با v(t) نشان دهیم، بنا به تعریف مشتق داریم

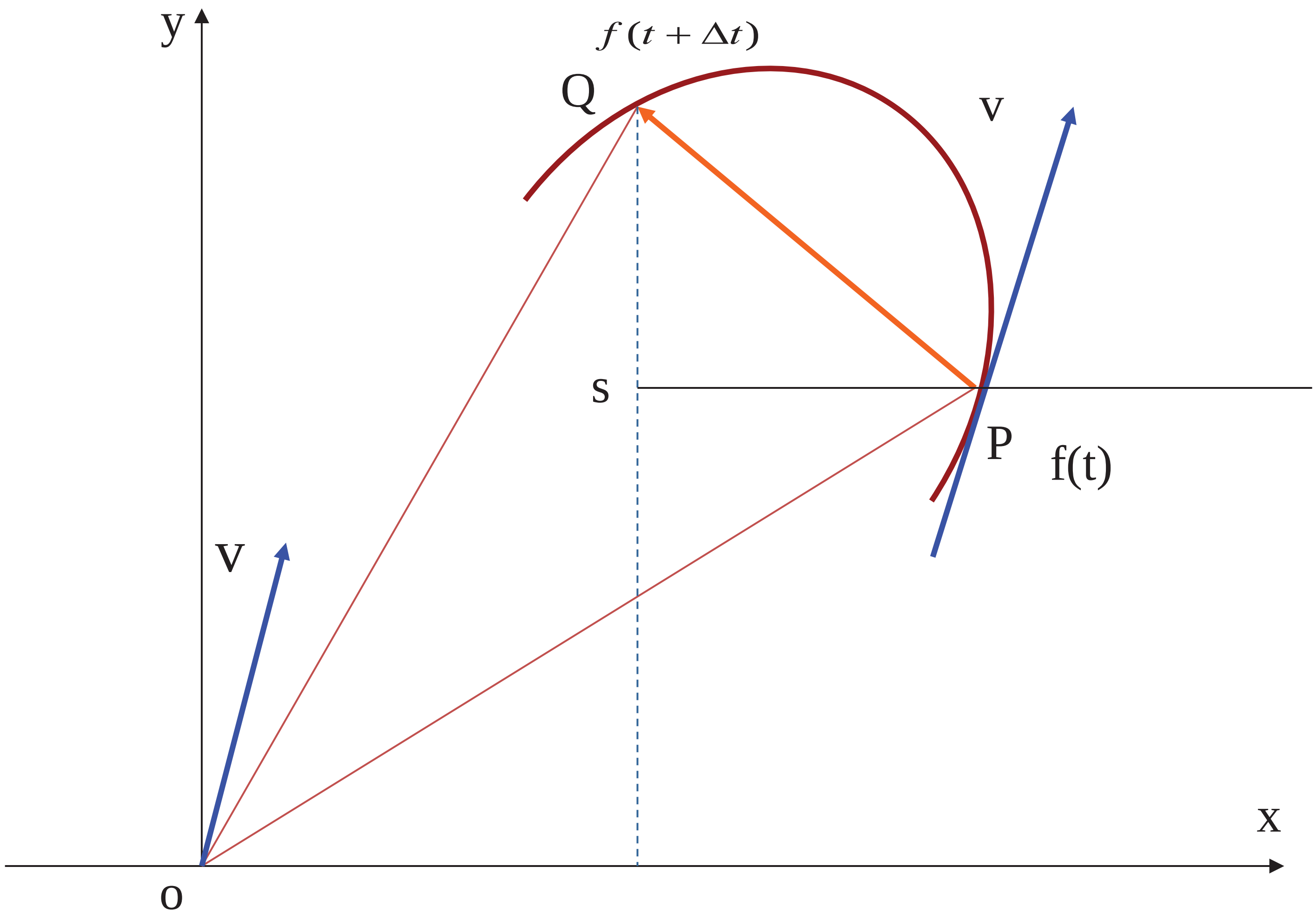
$$\mathbf{f}'(\mathbf{t}) = \mathbf{x}'(\mathbf{t})\mathbf{i} + \mathbf{y}'(\mathbf{t})\mathbf{j} = \mathbf{v}(\mathbf{t})$$

یعنی مشتق f در لحظه t، مساوی است با سرعت متحرک در این لحظه، اکنون با توجه به شکل اسلاید بعدی مشاهده می کنیم که

$$f(t+\Delta t) = f(t) + \overrightarrow{PQ}$$

بنابراین داریم

$$\frac{\mathrm{f}(\mathrm{t}+\Delta \mathrm{t}) - \mathrm{f}(\mathrm{t})}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{\Delta \mathrm{t}}$$



اگر v از f(t) رسم شود ، بر مسیر متحرک مماس است.

در نتیجه اگر $\Delta t \to 0$ آنگاه نقطه Q روی مسیر متحرک به نقطه P میل می کند و لذا خط PQ به خط مماس بر خم تبدیل می شود. این بدان معناست که اگر مبدا بردار v را به نقطه P منتقل کنیم آنگاه v(t) بر مسیر متحرک یا بر خم داده شده مماس می شود.

بنابراین مشتق به عنوان یک بردار بر مسیر متحرک **مماس** است.

تعریف

اگر $v(t)$ سرعت متحرک در لحظه t باشد، $|v(t)|$ را **اندازه** بردار سرعت متحرک می نامیم.

بنابراین هرگاه f خم مشتق پذیر

$$f(t) = x(t)i + y(t)j$$

مسیر متحرک باشد، آنگاه اندازه بردار سرعت این متحرک عبارت است از

$$|v(t)| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

✵توجه کنید که سرعت متحرک یک بردار و **اندازه بردار سرعت یک عدد** است.

مثال

الف) مکان متحرکی در لحظه t عبارت است از

$$\mathbf{f}(t) = e^{t}\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j}$$

مسیر، سرعت و اندازه بردارسرعت این متحرک رامعین می کنیم.

حل:

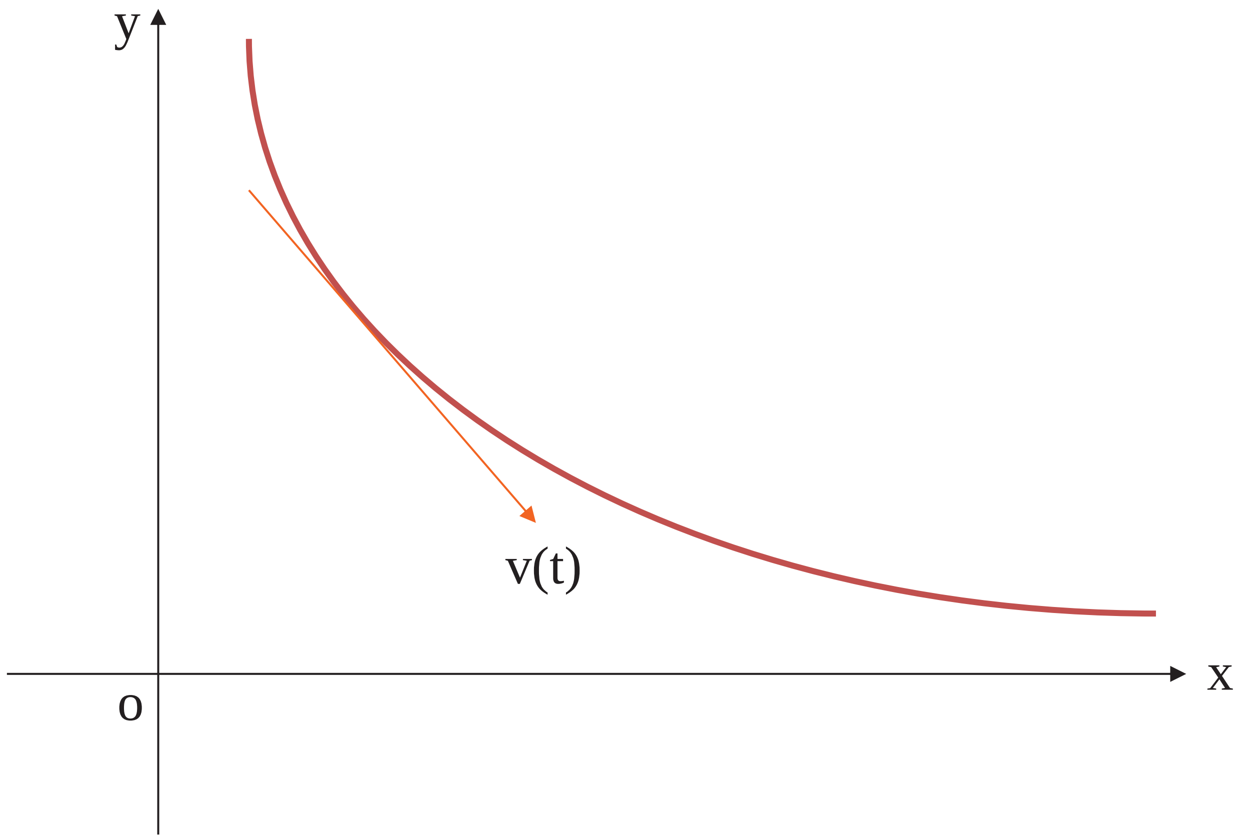
مختصات متحرک در لحظه t عبارت اند از

$$x = e^{t} \qquad , \qquad y = e^{-t}$$

مشاهده می کنیم که در هر لحظه t ، $x > 0$ و $y > 0$ و

$$y = \frac{1}{x}$$

بنابراین مکان متحرک شاخه ای از هذلولی $y = \frac{1}{x}$ است که در ربع اول واقع است.



سرعت و اندازه بردار سرعت این متحرک در لحظه t عبارت اند از

$$\mathbf{v}(t) = e^{t}\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} \quad , \quad |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t}} = \sqrt{2\cosh 2t}$$

مشاهده می کنیم که

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{-e^{-t}}{e^{t}}<0$$

بنابراین زاویه بردار سرعت با جهت مثبت محورx، باز (منفرجه) است لذا بردار سرعت به صورتی است که در شکل اسلاید پیش نشان داده شده است.

ب) یک ذره طبق رابطه زیر حرکت می کند

$$f(t)=(r\cos\omega t)i+(r\sin\omega t)j$$

که در آن r و ω اعداد مثبت وثابت اند. مسیر، سرعت واندازه بردار سرعت این متحرک را شناسایی می کنیم.

حل:

مختصات این متحرک در لحظه t عبارت اند از

$$x(t) = r\cos\omega t \quad , \quad y(t) = r\sin\omega t$$

چون

$$x^2(t) + y^2(t) = r^2$$

✵پس مسیر متحرک دایره ای به مرکز مبدا مختصات و شعاع r است.

سرعت و اندازه بردار سرعت متحرک در لحظه t عبارت اند از

$$v(t) = (-r\omega\sin\omega t)i + (r\omega\cos\omega t)j$$

$$|v(t)| = \sqrt{r^2\omega^2(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t)} = r\omega$$

چون

$$\frac{dy}{dx}=\frac{r\omega\cos\omega t}{-r\omega\sin\omega t}=-\cot\omega t=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\omega t\right)$$

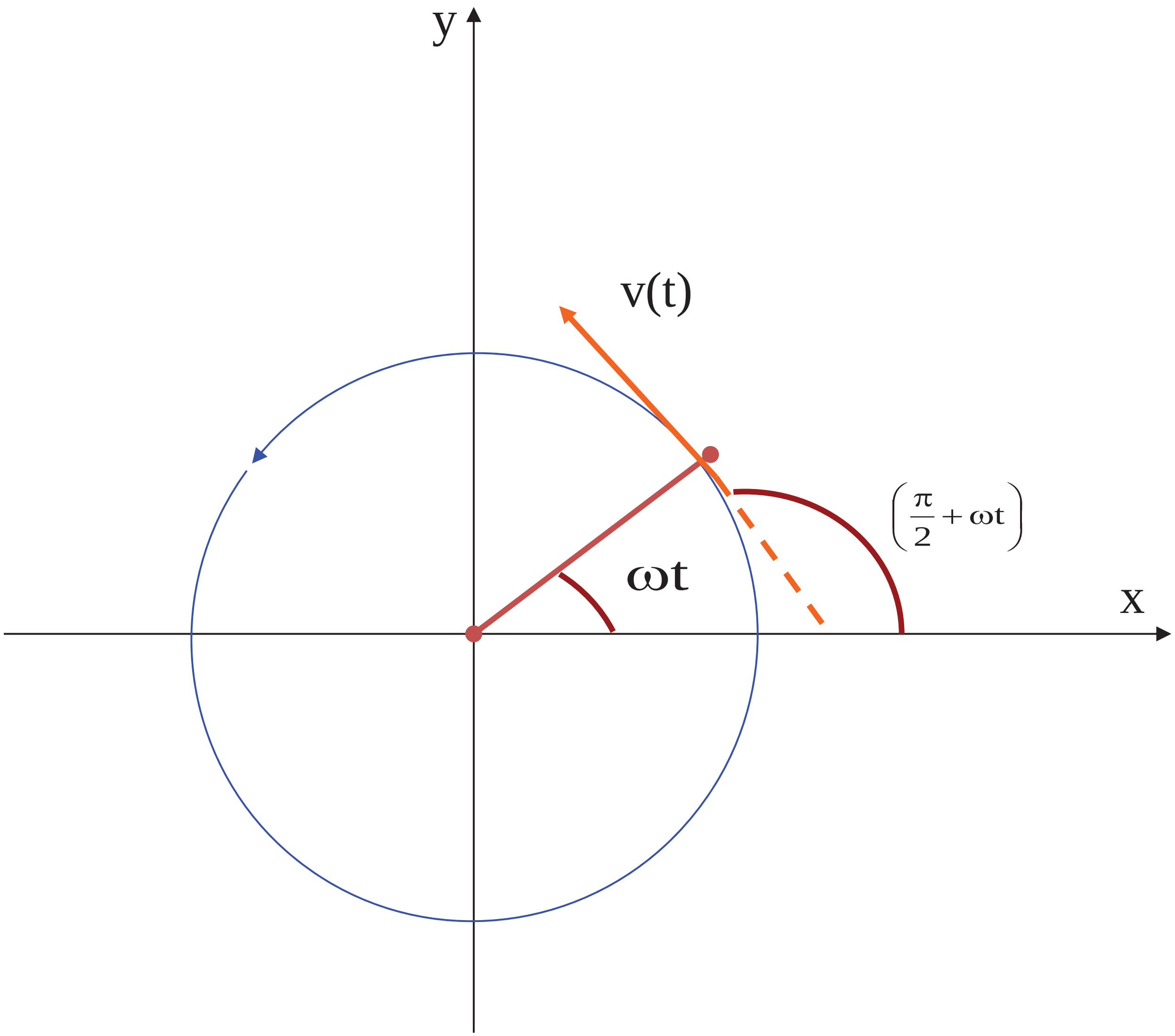
بنابراین در لحظه t، زاویه بردار سرعت v(t) با جهت مثبت محور x مساوی

است با $\left(\frac{\pi}{2}+\omega t\right)$

با توجه به اینکه در لحظه t ،شعاع حامل f(t) با جهت مثبت محور x مساوی

است با ωt، نتیجه می گیریم که بردارهای f(t) و v(t) در هر لحظه بر هم

عمودند وجهت v(t) در **جهت افزایش t** است.



شعاع حامل و سرعت متعامدند

تعریف

فرض کنید خم

$$f:[a,b]\to R^2 \quad , \qquad \mathbf{f}(\mathbf{t})=\mathbf{x}(\mathbf{t})\mathbf{i}+\mathbf{y}(\mathbf{t})\mathbf{j}$$

مسیر متحرکی است و دست کم دو بار مشتقپذیر باشد. در این صورت بردار

$$\mathbf{f}''(\mathbf{t})=\mathbf{x}''(\mathbf{t})\mathbf{i}+\mathbf{y}''(\mathbf{t})\mathbf{j}$$

را **شتاب متحرک** می نامیم ومعمولاً آن را با a(t) نشان می دهیم.

✵ بنابراین بردار a(t) شتاب متحرک ، مشتق سرعت متحرک است.

$$\mathbf{a}(\mathbf{t})=\mathbf{v}'(\mathbf{t})=\mathbf{x}''(\mathbf{t})\mathbf{i}+\mathbf{y}''(\mathbf{t})\mathbf{j}$$

بردار یکه مماس

فرض کنید مسیر متحرک خم

$$f:[a,b]\to R^2 \quad , \quad f(t)=x(t)i+y(t)j$$

توسط پارامتر طول خم s، پارامتری شود. به ویژه داریم

$$s(t)=\int_{t_0}^{t}|v(\eta)|\,d\eta$$

بنابراین داریم

الف)

$$\frac{ds}{dt}=|v(t)|$$

ب)

$$V(t)=\frac{df}{dt}=\frac{df}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\frac{df}{ds}|v(t)|$$

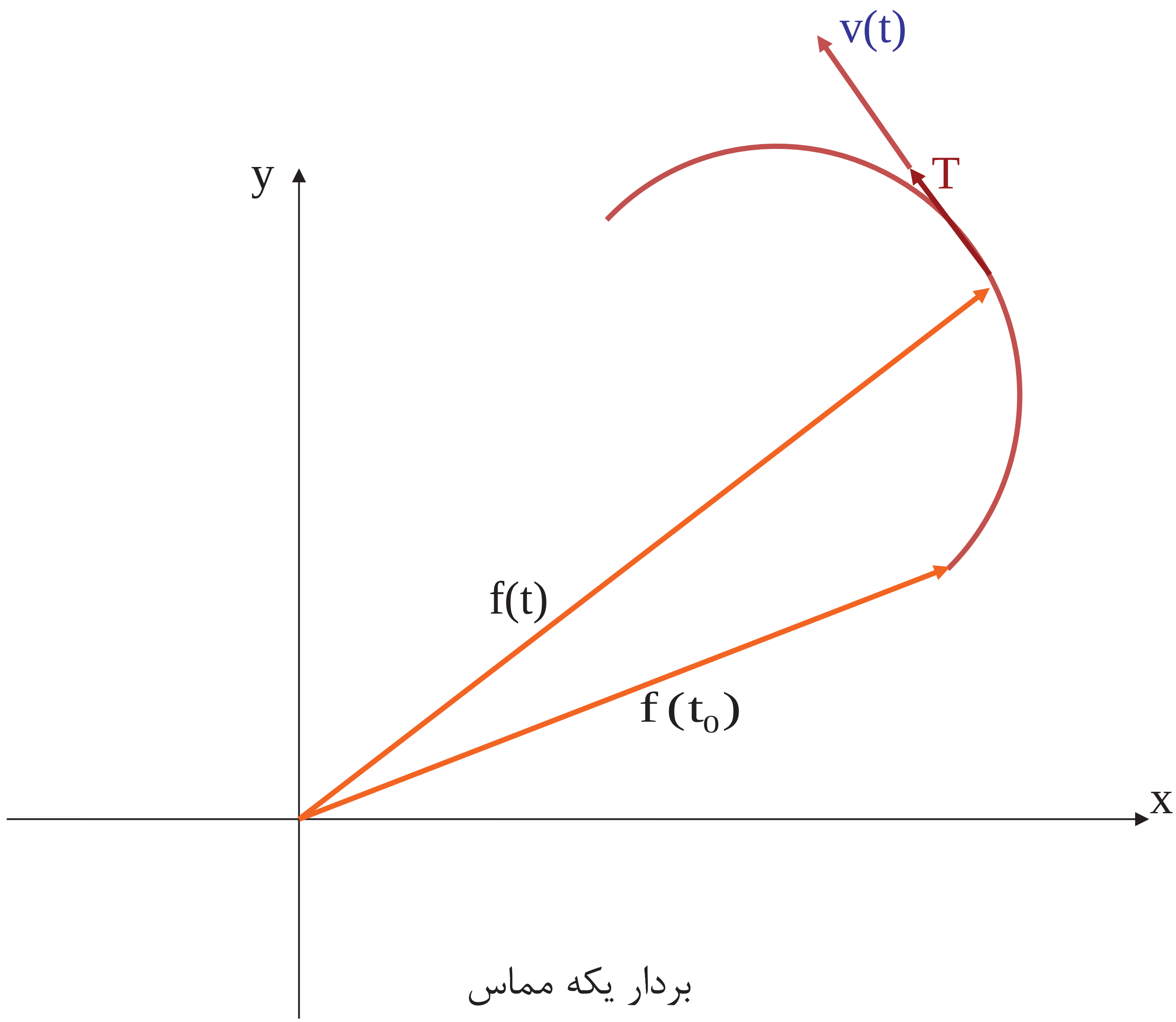
ولذا

$$\frac{df}{ds}=\frac{v(t)}{|v(t)|}$$

یعنی اگر خم ، مسیر متحرک ، نسبت به پارامتر طول خم پارامتری شود،
بردارسرعت نسبت به این پارامتر ، برداری واحد است و جهت آن با جهت
بردارسرعت نسبت به هر پارامـــــتر دیگر یکی است. این بردار را **بردار یکه مماس** می نامیم و با T نشان می دهیم.

$$T = \frac{df}{ds} = \frac{v(t)}{|v(t)|}$$

در شکل اسلاید بعدی بردار یکه مماس T را در لحظه t رسم کرده ایم.



بردار یکه مماس

بردار یکه قائم

فرض کنید خم هموار

$$f:[a,b]\to R^2 \quad , \qquad \mathbf{f(t) = x(t)i + y(t)j}$$

مسیر حرکت یک متحرک باشد. بنابراین درهر لحظه t ، بردار یکه مماس T بر

این خم یا مسیرتعریف شده است. زاویه T با جهت مثبت محور x را θ می نامیم.

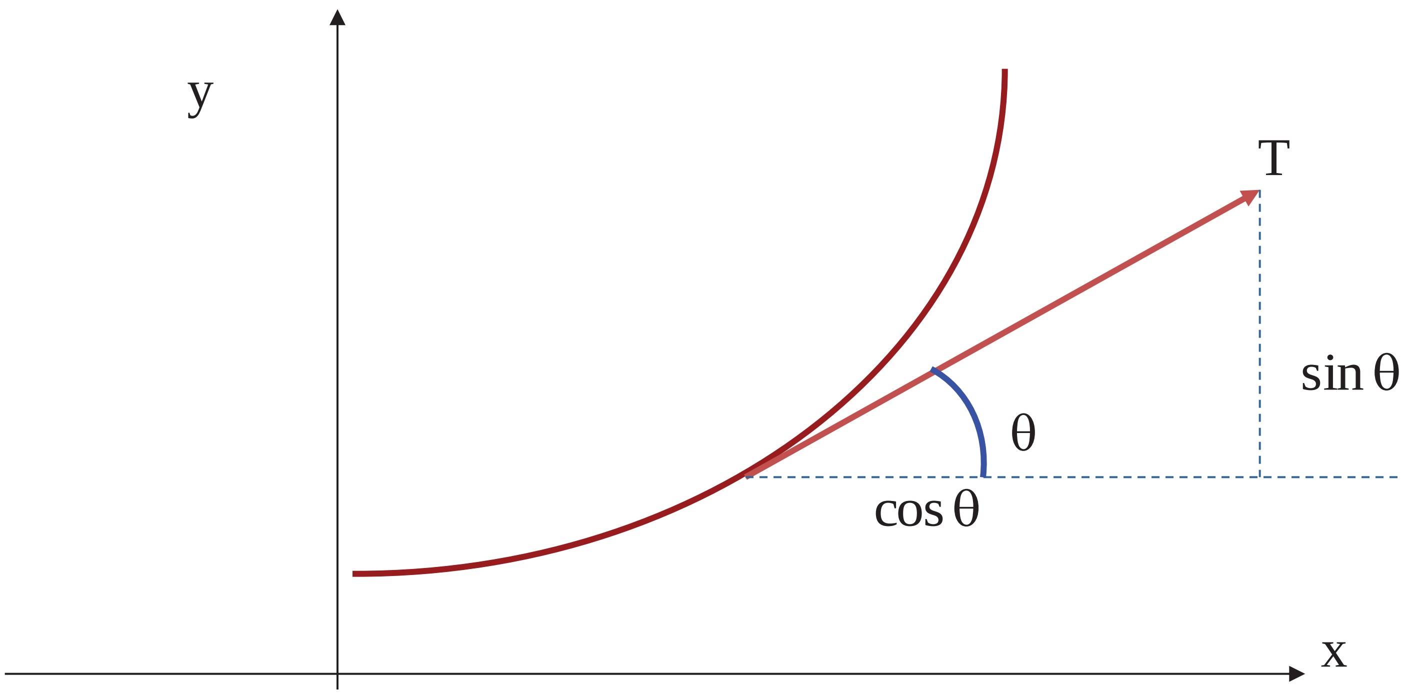
چون T برداری یکه است، پس جهت آن تابعی از اندازه زاویه θ است.

با توجه به شکل اسلاید بعدی می نویسیم

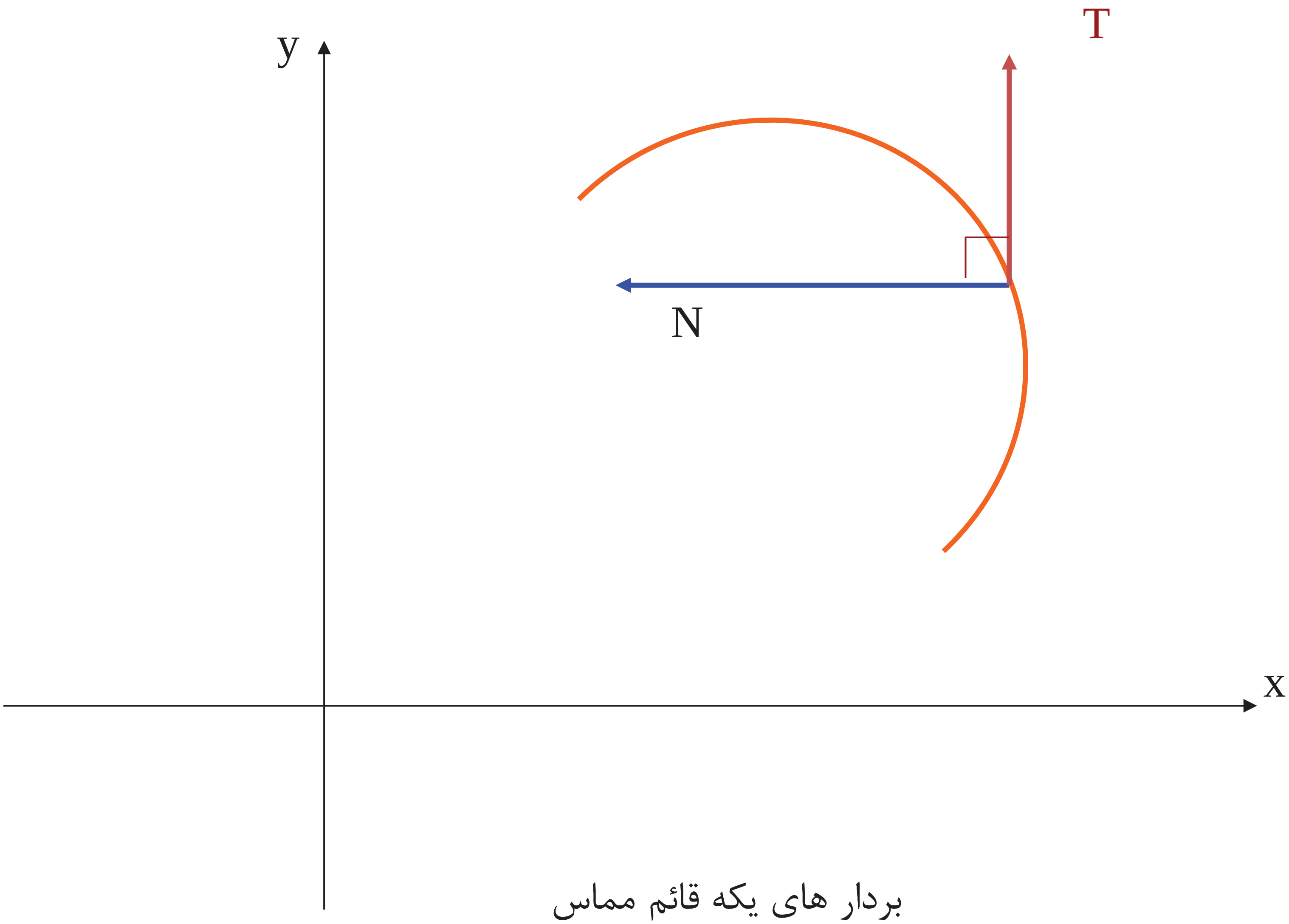
$$T = T(\theta) = (\cos\theta)i + (\sin\theta)j$$

داریم

$$\frac{dT}{d\theta} = (-\sin\theta)i + (\cos\theta)j = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)i + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)j$$



بنابراین $\frac{dT}{d\theta}$برداری یکه وعمود بر T است و با جهت مثبت محور x زاویه ای به اندازه $\frac{\pi}{2}+\theta$ می سازد. بنابراین $\pm\frac{dT}{d\theta}$دو بردار یکه قائم بر T با جهت های مخالف هم هستند.یکی از این دو بردار را که جهت آن به طرف تعقر خم است بردار یکه قائم می نامیم وبا N نشان می دهیم.



بردار های یکه قائم مماس

مولفه های مماسی و قائم سرعت وشتاب

فرض کنید مسیر متحرک ، خم هموار و دو بار مشتقپذیر

$$f:[a,b]\to R^2 \quad , \qquad \mathbf{f(t)=x(t)i+y(t)j}$$

باشد. سرعت این متحرک در لحظه t مساوی است با

$$\mathbf{V(t)=\frac{df}{dt}=\frac{df}{ds}.\frac{ds}{dt}=\left(\frac{ds}{dt}\right)T}$$

بنابراین در دستگاه مختصات TN داریم

$$\mathbf{V(t)=\left(\frac{ds}{dt}\right)T+0N}$$

یعنی مولفه های v(t) در دستگاه TN عبارت است از $\frac{ds}{dt}$ و 0. این عددها را به ترتیب **مولفه های مماسی و قائم سرعت** می نامیم.

حال از رابطه ❊ نسبت به t مشتق می گیریم تا شتاب متحرک را به دست آوریم.

داریم

This image cannot currently be displayed.

حال $\left(\frac{dT}{dt}\right)$ را با استفاده از پارامتر θ محاسبه می کنیم.داریم

$$\frac{dT}{dt}=\frac{dT}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}=\frac{dT}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} \qquad ❊❊$$

با قرار دادن $\frac{dT}{dt}$ از این رابطه در رابطه فوق به دست می آوریم

$$a(t)=\frac{d^2s}{dt^2}T+\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{d\theta}{ds}\left(\frac{dT}{d\theta}\right) \qquad ❊❊❊$$

می دانیم که $\frac{dT}{d\theta}$ نامزد خوبی برای بردار یکه قائم است فقط جهت آن است

که اجازه نمی دهد در این رابطه به جای آن N قرار دهیم. برای تشخیص جهت

$\frac{dT}{d\theta}$ به صورت زیر عمل می کنیم.

الف) اگر $\frac{d\theta}{dt} > 0$ آنگاه θ نسبت به t صعودی است وبنابراین با افزایش t،

T در جهت مثلثاتی تابیده می شود و لذا زاویه بین T و $\frac{dT}{d\theta}$ که برابر $\frac{\pi}{2}$ است با

در جهت مثلثاتی تغییر می کند. این بدان معناست که

$$\frac{dT}{d\theta} = N$$

ب) اگر $\frac{d\theta}{dt} < 0$ آنگاه θ نسبت به t نزولی است و لذا بر حسب افزایش t ،

T در جهت عقربه های ساعت تابیده می شود. و دراین حالت داریم

$$\frac{dT}{d\theta} = -N$$

در نتیجه فرمول ** را می توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{ds}{dt}\right)\left(\pm\frac{d\theta}{ds}\right)N = \frac{ds}{dt}\left|\frac{d\theta}{ds}\right|N$$

با استفاده از این فرمول ، رابطه *** به صورت زیر در می آید.

$$a(t)=\frac{d^2s}{dt^2}T+\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\left|\frac{d\theta}{ds}\right|N$$

عددهای $\frac{d^2s}{dt^2}$ و $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\left|\frac{d\theta}{ds}\right|$ را به ترتیب **مولفه های مماسی وقائم شتاب**

می نامیم. و آنها را به ترتیب با a_T و a_N نشان می دهیم. بنابراین داریم

$$a(t)=a_T T+a_N N$$

از این رابطه نتیجه می شود که

$$|a(t)|^2=a^2{}_T+a^2{}_N$$

بنابراین برای پیدا کردن a_N (a_T) لازم است که $|a(t)|^2-a_T^2$ ($|a(t)|^2-a^2{}_N$) را محاسبه کنیم.

مثال

الف) بردار یکه قائم ، مولفه های مماسی و قائم شتاب متحرکی با معادله مسیر

حرکت زیر را پیدا کنید.

$$f(t) = 3(\cos t + t\sin t)i + 3(\sin t - t\cos t)j$$

حل:

در لحظه t داریم

$$v(t) = (3t\cos t)i + (3t\sin t)j$$

بنابراین

$$\frac{ds}{dt} = |v(t)| = 3t$$

ولذا بردار یکه مماس در لحظه t عبارت است از

$$T = \frac{v(t)}{\frac{ds}{dt}} = (\cos t)i + (\sin t)j$$

این فرمول نشان می دهد که زاویه T با جهت مثبت محور x برابراست با t،یعنی

$\theta = t$. بنابراین $\frac{d\theta}{dt} = 1 > Q$ در نتیجه بردار یکه قائم بر مسیر عبارت است از

$$N = \frac{dT}{d\theta} = \frac{dT}{dt} = (-\sin t)i + (\cos t)j$$

چون $\theta = t$ پس

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{ds}{dt} = 3t$$

و بنابراین مولفه های مماسی و قائم شتاب عبارت اند از

$$a_T = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = 3$$

$$a_N = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \left|\frac{d\theta}{ds}\right| = \frac{(3t)^2}{3t} = 3t$$

در نتیجه شتاب متحرک به صورت زیر به دست می آید.

$$a(t) = 3T + 3tN$$

تعریف

عدد $\left|\frac{d\theta}{ds}\right|$ را که سرعت خمیده شدن مسیر متحرک نسبت به پارامتر طول خم است، **انحنای مسیر** یا **خم** می نامیم و آن را با حرف یونانی κ (بخوانید کاپا)نشان می دهیم.

$$\kappa = \left|\frac{d\theta}{ds}\right|$$

می توان ثابت کردکه انحنایκ ذاتی خود مسیر است و به انتخاب دستگاه مختصات بستگی ندارد. با وجود این پیدا کردن فرمولی برای محاسبه κ بر حسب مختصات مورد استفاده بسیار مناسب است.

✵ با توجه به تعریف مشاهده می کنیم که هر چه $\left|\frac{d\theta}{ds}\right|$ بیشتر (کمتر) باشد خمیدگی خم بیشتر (کمتر) است و لذا انتظار می رود که خمیدگی یک دایره کوچک عددی **بسیار بزرگ** و بر عکس خمیدگی خط راست **صفر** باشد.

مثال

الف) انحنای خط راست زیر را پیدا کنید.

$$y=ax+b$$

حل:

با قرار دادن $x = t$ این خط را می توان به عنوان نگاره خم زیر در نظر گرفت.

$$f(t) = t\,i + (a\,t + b)\,j$$

داریم

$$a(t) = 0$$

و از این رو

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \left|\frac{d\theta}{ds}\right| = a_N = 0$$

چون

$$\frac{ds}{dt} = |v(t)| = \sqrt{1+a^2} \neq 0$$

پس

$$\left|\frac{d\theta}{ds}\right| = 0$$

✵بنابراین انحنای خط راست صفر است. چیزی که انتظارش را داشتیم.

حرکت در فضا

تعریف مفاهیم اولیه

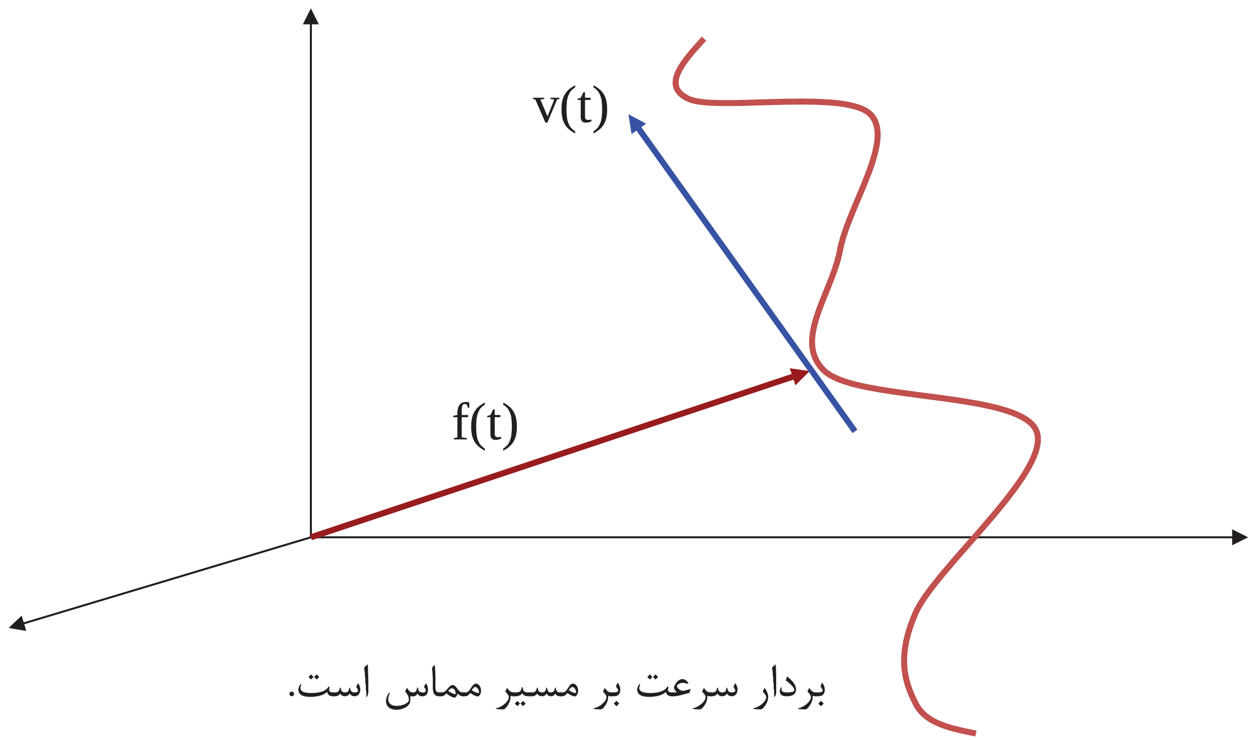
فرض کنید خم مشتق پذیر

$$f:[a,b]\to R^3 \quad , \quad \mathbf{f}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}$$

مسیر یک متحرک باشد . بردار

$$\mathbf{f}'(t)=x'(t)\mathbf{i}+y'(t)\mathbf{j}+z'(t)\mathbf{k}$$

را سرعت متحرک در لحظه t می نامیم و آن را با v(t) نشان می دهیم .



بردار سرعت بر مسیر مماس است.

چون به ازای هر $t \in [a, b]$ $\quad$ $v(t) = f'(t) \neq 0$ پس بردار یکه

$$T = \frac{f'(t)}{|f'(t)|} = \frac{1}{|v(t)|} v(t)$$

بدون ابهام تعریف می شود.

این بردار را **بردار یکه مماس** بر خم (یا مسیر متحرک) در نقطه t می نامیم.

فرض می کنیم

$$s(t) = \int_a^t |f'(\eta)|\, d\eta$$

❊

طول خم از نقطه f(a) تا نقطه f(t) باشد. در این صورت s(t) تابعی صعودی و مشتقپذیر از t است و داریم

❊❊

$$\left(\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|v(t)|}\right)\frac{ds}{dt}(t) = |v(t)|$$

با استفاده از روابط ❊ و ❊❊ داریم

$$\frac{df}{ds} = \frac{df}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{v(t)}{|v(t)|} = T$$

یعنی مشتق بردار موضع نسبت به طول خم مساوی است با بردار یکه مماس

❋طول بردار سرعت ، یعنی $|\mathbf{v(t)}|$ در لحظه t را مقدار بردار سرعت متحرک می نامیم.

❋اگر علاوه بر هموار بودن ، تابع f دو بار مشتقپذیر باشد، آنگاه بردار

$$a(t) = f''(t) = x''(t)i + y''(t)j + z''(t)k$$

را**شتاب** متحرک در لحظه t می نامیم.

مثال:

در مثال های قبل طول پیچوار

$$f(t)=(a\cos t)i+(a\sin t)j+(bt)k \qquad t\in R$$

را که بین نقطه های $f(0)$ و $f(t)$ و $(t>0)$ واقع است به صورت

$$s(t)=\int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\,d\eta=\sqrt{a^2+b^2}\,t$$

محاسبه کردیم. چون

$$v(t)=(-a\sin t)i+(a\cos t)j+bk$$

پس بردار یکه مماس مساوی است با

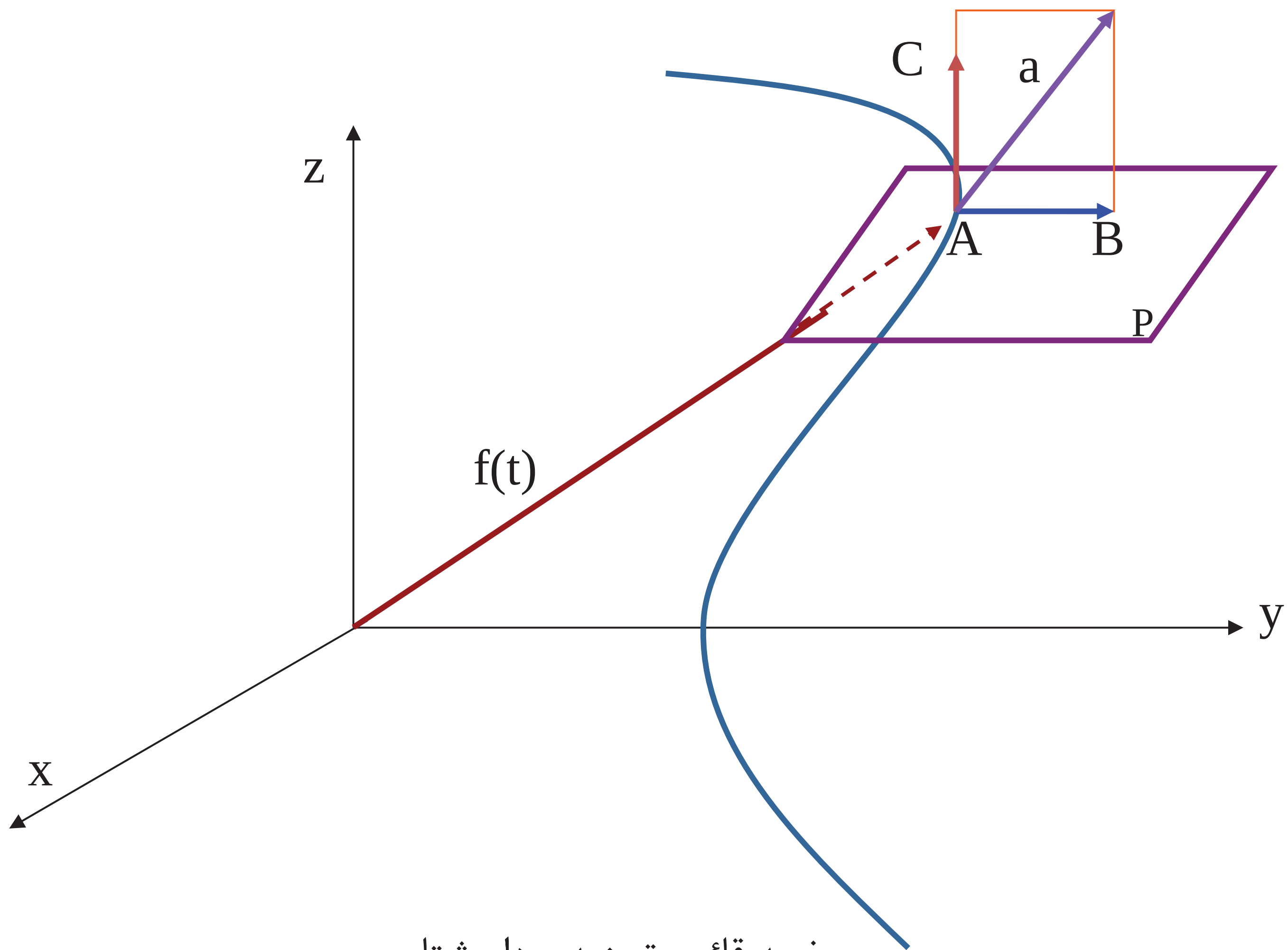
$$T=\frac{v(t)}{\frac{ds}{dt}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin ti+a\cos tj+bk)$$

همچنین داریم

$$a(t)=-a(\cos ti+\sin tj)$$

صفحه قائم و مولفه های شتاب

می خواهیم بردار شتاب a(t) را که از نقطه f(t) رسم می شود به مجموع دو بردار تجزیه کنیم ، یکی در امتدادبردار یکه مماس T و دیگری برداری واقع در صفحه عمود بر T در نقطه f(t) . این صفحه را صفحه قائم بر خم (یا مسیر) در لحظه t می نامیم.



صفحه قائم وتجزیه بردار شتاب

مشاهده می کنیم که بردار شتاب $\vec{a}$ به مجموع دو بردار $A\vec{C}$, $A\vec{B}$ تجزیه شده است.

$$\vec{a}(t) = A\vec{B} + A\vec{C}$$

می خواهیم این بردار ها را برحسب تابع f شناسایی کنیم. با استفاده از قاعده زنجیری می نویسیم

$$a(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dt}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{df}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\right)\frac{ds}{dt} = \frac{d^2 f}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{df}{ds}\cdot\frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$= \frac{d^2 s}{dt^2}T + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\left(\frac{d^2 f}{ds^2}\right)$$

اکنون از دو طرف رابطه زیر نسبت به S مشتق می گیریم.

$$T.T=\left(\frac{df}{ds}.\frac{df}{ds}\right)=1$$

در نتیجه

$$\frac{d^2f}{ds^2}\frac{df}{ds}=\frac{d^2f}{ds^2}.T=0$$

بنابراین بردار $\frac{d^2f}{ds^2}$ بر بردار مماس T عمود است. بنابراین اگر از نقطه A رسم شود روی صفحه قائم خواهد بود. بردار یکه N را به صورت

$$N=\frac{\frac{d^2f}{ds^2}}{\left|\frac{d^2f}{ds^2}\right|}$$

تعریف می کنیم وآن را **بردار قائم اصلی** بر خم در نقطه A= f(t) می نامیم. ثابت می شود

$$N = \frac{\frac{dT}{dt}}{\left|\frac{dT}{dt}\right|}$$

با استفاده از ❊ بر دار a(t) را به صورت زیرمی نویسیم.

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2}T + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\left|\frac{d^2f}{ds^2}\right|N$$

بنابراین بردار a(t) به مجموع دو بردار تجزیه می شود.

تعریف

الف) عددهای $\frac{d^2s}{dt^2}$ ، $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\left|\frac{d^2f}{ds^2}\right|$ را به ترتیب **مولفه های مماسی و قائم**

شتاب در لحظه t می نامیم وآنها را به صورت زیر نشان می دهیم

$$a_T = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d}{dt}|V| \qquad a_N = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\left|\frac{d^2 f}{ds^2}\right| = \sqrt{|a|^2 - a_T{}^2}$$

ب) بردار $\frac{dT}{ds}$ و اندازه آن عدد

$$\kappa = \left|\frac{d^2f}{ds^2}\right| = \left|\frac{dT}{ds}\right|$$

را به ترتیب **بردار انحنا** و **انحنای مسیر** در لحظه t می نامیم.

مثال

الف) بردار قائم اصلی ، معادله صفحه قائم و انحنای خم

$$f(t) = (a\cos t)i + (a\sin t)j + (bt)k \qquad t \in R$$

رادر نقطه $A(-a,0,b\pi)$ که به ازای $t = \pi$ به دست می آید، پیدا می کنیم.

حل

بردار یکه مماس در لحظه t عبارت است از

$$T = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin ti + a\cos tj + bk)$$

و لذا در نقطه A داریم

$$T = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-aj + bk)$$

همچنین در لحظه t داریم

$$\frac{dT}{ds}=\frac{dT}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{dt}{ds}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}((-a\cos t)i+(-a\sin t)\,j)$$

بنابراین با توجه به رابطه

$$\frac{dt}{ds}=\frac{1}{\frac{ds}{dt}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

در نقطه A یعنی در لحظه $t=\pi$ داریم

$$\frac{dT}{ds}=\frac{ai}{a^2+b^2}$$

بنابراین انحنای مسیر در نقطه داده شده ، مساوی است با

$$\kappa=\frac{a}{a^2+b^2}$$

و از این رو بردار قائم اصلی عبارت است از

$$N = \frac{\frac{dT}{ds}}{\kappa} = i$$

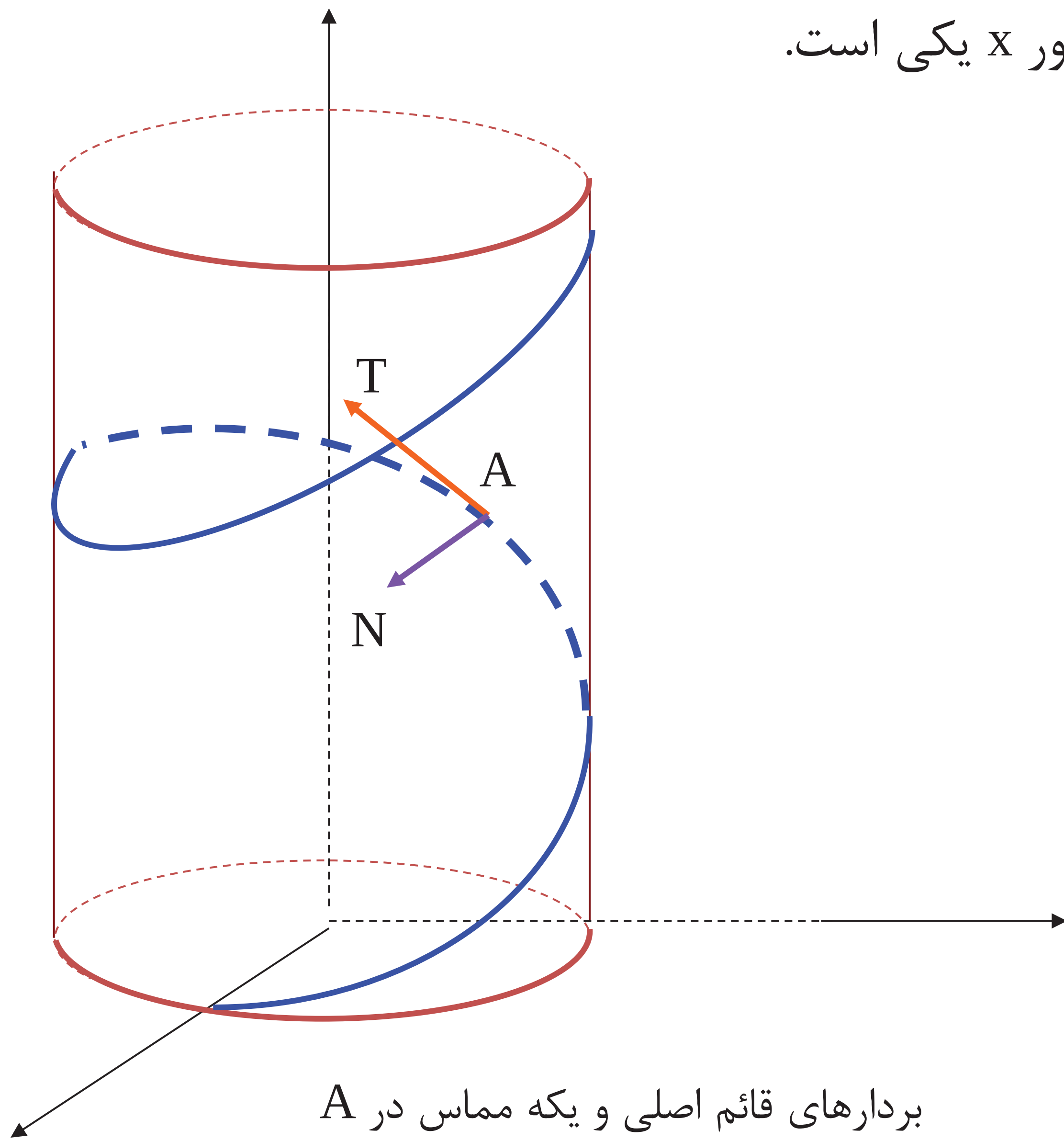
چون صفحه قائم از A می گذرد و بر T عمود است پس معادله آن عبارت است از

$$(x+a, y, z-b\pi).T = 0$$

یا

$$ay - b(z-b\pi) = 0$$

در شکل زیر مبدا N را در A قرار داده و آن را رسم کر ده ایم. توجه کنید که جهت N و محور x یکی است.



بردارهای قائم اصلی و یکه مماس در A

قائم مضاعف وتاب

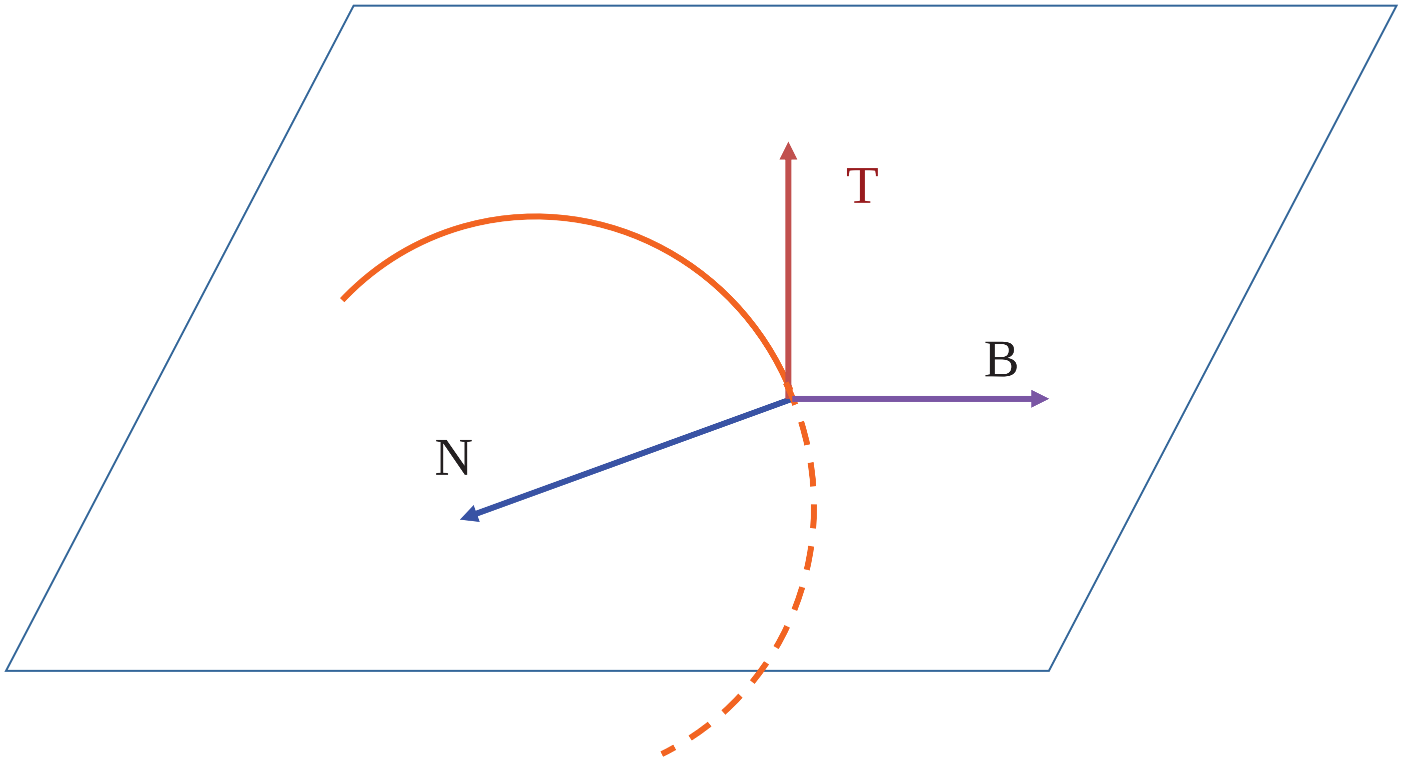
دیدیم که اگر خم هموار

$$f(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k \qquad t \in [a,b]$$

دو بار مشتقپذیر باشد، آنگاه به ازای هر t ، صفحه قائم بر خم و مولفه های مماسی و قائم شتاب بدون هیچ ابهامی تعریف می شوند. می دانیم که بردار قائم اصلیN در صفحه قائم قرار دارد و بردار یکه مماس T براین صفحه عمود است . اکنون در صفحه قائم بردار یکه B را چنان در نظر می گیریم که دستگاه TNB یک دستگاه راستگرد باشد.

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N}$$

بردار B را قائم مضاعف بر خم ، صفحه تشکیل شده توسط بردارهای N وT را صفحه **بوسان** و صفحه تشکیل شده توسط بردار های B وT را صفحه **رکتیفایر** (یکسوساز) در لحظه t می نامیم.



محاسبه انحنا

$$\vec{B} = \frac{\vec{V} \times \vec{a}}{\left|\vec{V} \times \vec{a}\right|}$$

مثال: معادله صفحات بوسان و قائم بر منحنی $(\sin(t),\sin(t),\cos(2t))$ در نقطه $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ به دست آورید.

$\frac{dB}{ds}$ بر T نیزعمود است .

در نتیجه $\frac{dB}{ds}$ مضربی از بردار N است. یعنی عددی چون τ وجود دارد که

$$\frac{dB}{ds} = -\tau N$$

τ را **تاب خم** در نقطه مورد محاسبه می نامیم.

فرمول * نشان می دهد که

$$|\tau| = \left|\frac{dB}{ds}\right|$$

و از این رو ، **تاب، آهنگ چرخش** بردار B است.

توجه کنید که انحنا هرگز منفی نیست ولی تاب می تواند مثبت ، صفر یامنفی باشد.

مثال

الف) معادله صفحه بوسان و تاب خم

$$f(t)=(\sqrt{3}\cos t)i+(\sqrt{3}\sin t)j+k \qquad t\in R$$

را پیدا کنید.

حل:

این خم محل تلاقی صفحه $z = 1$ و استوانه $x^2+y^2=3$ است . و بنابراین

خمی مسطح است. پس صفحه بوسان آن عبارت است از $z = 1$.چون خم

مسطح است پس تابی ندارد یعنی $\tau=0$.

محاسبه انحنا

$$\kappa = \frac{|v(t) \times a(t)|}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3} = \frac{|f'(t) \times f''(t)|}{|f'(t)|^3}$$

مثال

مسیر متحرکی عبارت است از

$$\mathbf{f}(\mathbf{t}) = \mathbf{t}\mathbf{i} + \mathbf{t}\mathbf{j} + \mathbf{t}^2\mathbf{k} \qquad \mathbf{t} \in \mathbf{R}$$

می خواهیم انحنای مسیر را پیدا کنیم و معادله صفحه قائم بر مسیر را در نقطه ای که انحنا بیشنه است به دست آوریم.

حل:

داریم

$$f'(t) = i + j + 2tk \quad , \quad f''(t) = 2k$$

بنابراین

$$f'(t) \times f''(t) = -2j + 2i \quad , \quad |f'(t) \times f''(t)| = 2\sqrt{2}$$

$$|f'(t)| = \sqrt{2 + 4t^2}$$

از این رو

$$\kappa = \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^3 (1 + 2t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1 + 2t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

بیشینه انحنا وقتی به دست می آید که $t = 0$ به ازای این مقدار $\kappa = 1$ چون

صفحه قائم از نقطه $(0, 0, 0)$ می گذرد و بر بردار یکه مماسی

$$T_{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(i + j)$$

عمود است، پس معادله آن به صورت زیر است

$$x + y = 0$$

مثال

الف) مسیر متحرکی خمی با معادلات پارامتری زیر است

$$x(t) = 3\cos t \qquad , \qquad y(t)=4\sin t$$

انحنای این مسیر را در لحظه t و سپس در لحظه های $t = 0$ و $t = \frac{\pi}{2}$ پیدا کنید.

حل:

داریم

$$x' = -3\sin t \quad , \quad x'' = -3\cos t \quad , \quad y' = 4\cos t \quad , \quad y'' = -4\sin t$$

بنابراین

$$\kappa = \frac{\left|12\sin^2 t + 12\cos^2 t\right|}{(9\sin^2 t + 16\cos^2 t)^{3/2}} = \frac{12}{(9\sin^2 t + 16\cos^2 t)^{3/2}}$$

به ازای $t = 0$ و $t = \frac{\pi}{2}$ داریم

$$\kappa(0) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \quad , \quad \kappa(\frac{\pi}{2}) = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$$

ب) انحنای خم $4y = x^2$ را پیدا کنید .

حل:

از فرمول داریم

$$\kappa = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

$$\kappa = \frac{\frac{1}{2}}{(1+(\frac{x}{2})^2)^{3/2}}$$

مثلاً در نقطه)0و0(انحنای این خم عبارت است از

$$\kappa(0) = \frac{1}{2}$$

محاسبه تاب

بنا به تعریف عدد τ را که در فرمول

$$\frac{dB}{ds} = -\tau N$$

صدق می کند **تاب خم** یا **مسیر متحرک** می نامیم.

$$\tau = \frac{\left(f'(t).(f''(t) \times f'''(t)\right)}{\left|f'(t) \times f''(t)\right|^2}$$

با استفاده ازاین فرمول یکی از مهمترین خصوصیات خمهای مسطح به دست می آید.

❋می دانیم که اگر $\tau = 0$ آنگاه خم مسطح است. به عبارت دیگر اگر

❋❋ $$\left(f'(t).f''(t) \times f'''(t)\right) = 0$$

آنگاه خم داده شده f(t) مسطح است.

برعکس اگر خم f(t) مسطح باشد، روشن است که بردارهای $(f'(t), f''(t), f'''(t))$ نمی توانند کنجی نابدیهی بسازند واز این رو ، ❋❋ مجدداً برقرار است.

✵بنابراین خم f(t) در یک صفحه قرار دارد اگر وتنها اگر تاب آن صفر باشد. به عبارت دیگر خم مسطح است اگر و تنها اگر رابطه ❋❋ بر قرار باشد.

مثال

الف) خم

$$\mathbf{f}(\mathbf{t}) = \sqrt{\mathbf{t}^2 + 1}\,\mathbf{i} + \mathbf{t}^3\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \qquad \mathbf{t} \in \mathbf{R}$$

مسطح است(در یک صفحه قرار دارد) بنابراین تاب آن در هر نقطه صفر است.

ب) تاب خم

$$f(t)=(e^{-t}\cos t)i+(e^{-t}\sin t)j+e^{-t}k \qquad t\in R$$

را در نقطه دلخواه f(t) محاسبه می کنیم و نشان می دهیم که این خم مسطح نیست.

حل:

داریم

$$f'(t)=-e^{-t}(\cos t+\sin t)i+e^{-t}(\cos t-\sin t)j-e^{-t}k$$

$$f''(t)=(2e^{-t}\sin t)i-2(e^{-t}\cos t)j+e^{-t}k$$

$$f'''(t)=2e^{-t}(\cos t-\sin t)i+2e^{-t}(\cos t+\sin t)j-e^{-t}k$$

بنابراین داریم

تعریف

خم هموار و دو بار مشتقپذیر زیر و نقطه P واقع بر آن را در نظر می گیریم.

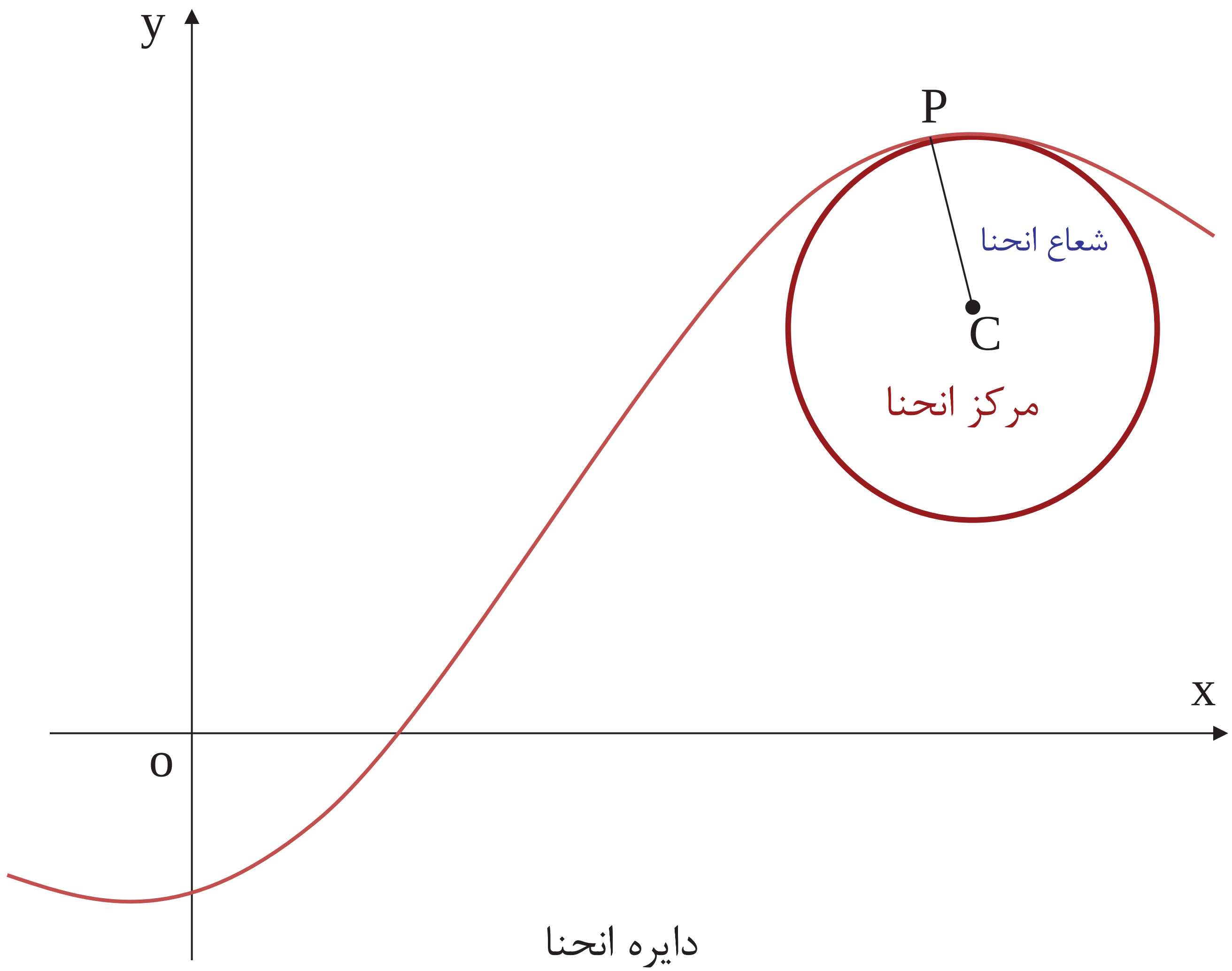
بر این خم در نقطه P دایره ای مماس می کنیم که

الف) انحنای دایره مساوی با شد با انحنای خم

ب) مرکز دایره در طرف تقعرخم و روی خط قائم بر خم در P باشد . این دایره را دایره انحنا (دایره بوسان)، مرکز و شعاع آن را به ترتیب مرکز و شعاع انحنای خم در نقطه P می نامیم .

شعاع انحنا: $\rho = \dfrac{1}{\kappa}$

مرکز انحنا: $O(t) = f(t) + \rho.N$



دایره انحنا

مثال:

شعاع انحنا و مرکز انحنای خم

$$f(t) = (a\cos(t), a\sin(t)) \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

را بیابید.

مثال: خم $r(t)=(t,e^t+\frac{4}{7}t^2,t^2)$ را در امتداد بردار $(0,4,7)$ بر صفحه xy تصویر کرده و خم حاصل از این تصویر را c می نامیم.

(الف) مطلوب است معادله پارامتری خم c .

(ب) خم c در کدام نقطه دارای بیشترین انحنا است؟

(ج) مطلوب است معادله دایره بوسان خم c در نقطه ای که خم دارای بیشترین انحنا است.

توابع چندمتغیره

دراین بخش تعریف توابع چندمتغیره ونمودار توابع دومتغیر ه را بررسی می کنیم.

تعریف

تابع fکه دامنه آن زیر مجموعه ای از R^n وبرد آن زیرمجموعه ای از اعدادحقیقی

باشد رایک تابع (حقیقی) n متغیر ه می گوییم.

اگر
$$f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$$

آنگاه دامنه f مجموعه نقاط (x,y)در صفحه xy است به طوری که

$$4-x^2-y^2\ge 0$$

به عبارت دیگر ،دامنه f ناحیه محدود به دایره $x^2+y^2=4$ در صفحه xy است.

اگر
$$f(x,y,z)=\sqrt{x^2+2y^2+4z^2}$$

آنگاه دامنه g مجموعه همه نقاط فضا ست، زیرا به ازای هر (x,y,z)،

$$x^2+2y^2+4z^2\ge 0$$

اگر

$$f(x,y)=xy \qquad , \qquad x\ge 0 \ \ , y\ge 0$$

در این صورت دامنه f مشخص شده است و برابراست با ربع اول صفحه xy .

نمودار توابع دومتغیره:

نمودار یک تابع دومتغیر همچون f مجموعه نقاط $(x,y,f(x,y))$ در فضا است به

طوری که (x ,y) در دامنه f باشد. اگر، مطابق معمول توابع یک متغیره ،بنویسیم

$z = f(x ,y)$، نمودار تابع، دراین صورت نمودار f مجموعه نقاط (x, y, z) است به طوری که

$$z = f(x,y)$$

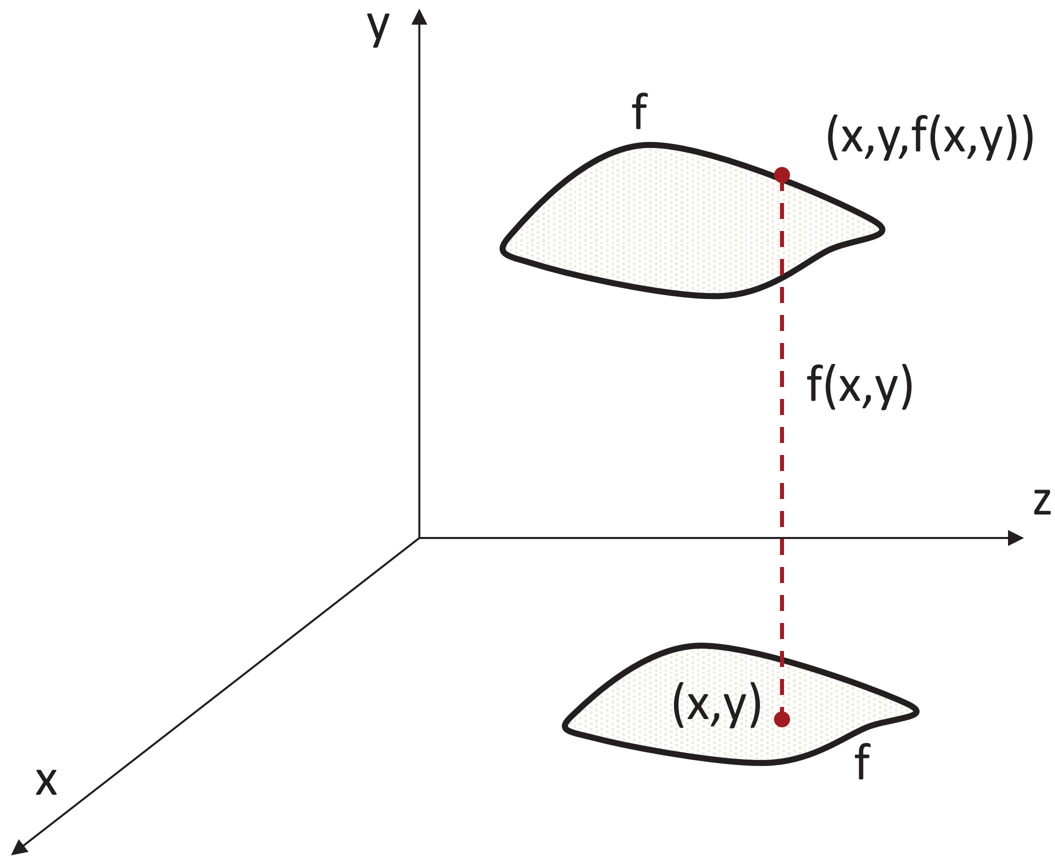
.

نمودار یک تابع دومتغیر ه معمولا"سطح یا رویه ای در فضاست.برای رسم این

نمودارها آگاهی ازمقاطع آنها با صفحه های $z = c$، یعنی صفحه های موازی با صفحه xy ،مفید است.

این مقاطع را اثرهای نمودار f می گوییم. به عبارت دیگر اثر f در صفحه $z = c$

مجموعه همه نقاط (x,y,z) در فضاست به طوری که $f(x,y) = c$.


y
f
(x,y,f(x,y))
f(x,y)
z
(x,y)
f
x

به عنوان مثال اگر $z=f(x,y)=4-x^2-y^2$ آنگاه اثر f در صفحه $z=1$ نمـودار

$4-x^2-y^2=1$ یا $x^2+y^2=3$ است که دایره ای به شعاع $\sqrt{3}$ ومـــــــــرکز

$(0, 0, 1)$است.

مفهوم دیگری که رابطه نزدیکی بااثر توابع دومتغیر ه دارد وبرای توصــیف نمودار

این توابع به کار می رود ،مفهوم «منــــــــحنی تراز» است. مجموعه همه نقاط

$(x,y,0)$ در صفحه xy رابه طوری که $f(x,y)=c$ یک منحنی تراز f می گویــیم.

✍روشن است که هر منحنی تراز f تصویر قائم یک اثر f بر صفحه xy است.

✵با استفاده ازمنحنی های تراز،می توان نمودارهای سه بعدی راتوسط نمودارهای

دو بعدی توصیف کرد.

مثال

فرض کنیم $f(x,y)=4-x^2-y^2$ نمودار f وچند منحنی تراز آن را رسم می کنیم.

حل:

اگر $c<4$ ،آنگاه منحنی تراز $f(x,y)=c$ توسط معادله

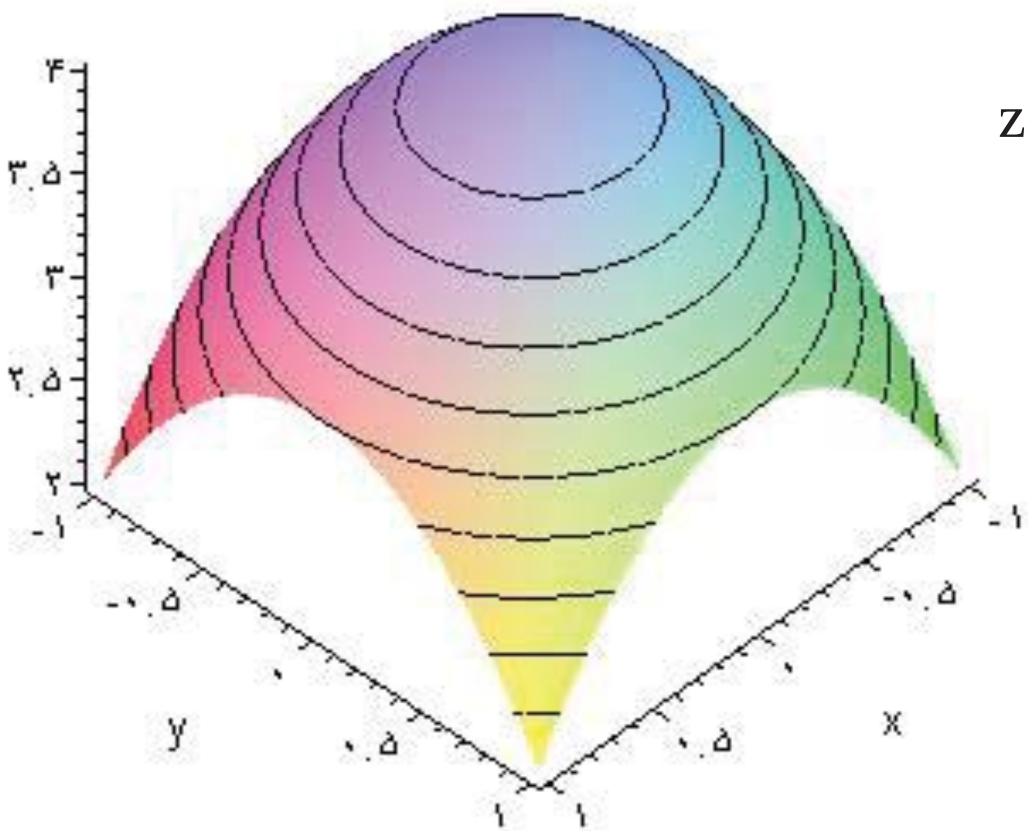
$$x^2+y^2=4-c$$

مشخص می شودکه دایره ای به مرکز $(0,0)$و شعاع $\sqrt{4-c}$ است. بنابراین اثر f

در صفحه $z=c$نیز دایره ای به شعاع $\sqrt{4-c}$ ، ومرکز $(0,0,c)$ است. منحنی

تراز $f(x,y)=4$ نقطه $(0,0,c)$ است. اگر $c>4$ آنگاه منحنی تراز $f(x,y)=c$ ،

شامل هیچ نقطه ای نیست.یعنی صفحه $z=c$ با $c>4$،نمودار f را قطع نمی کند.



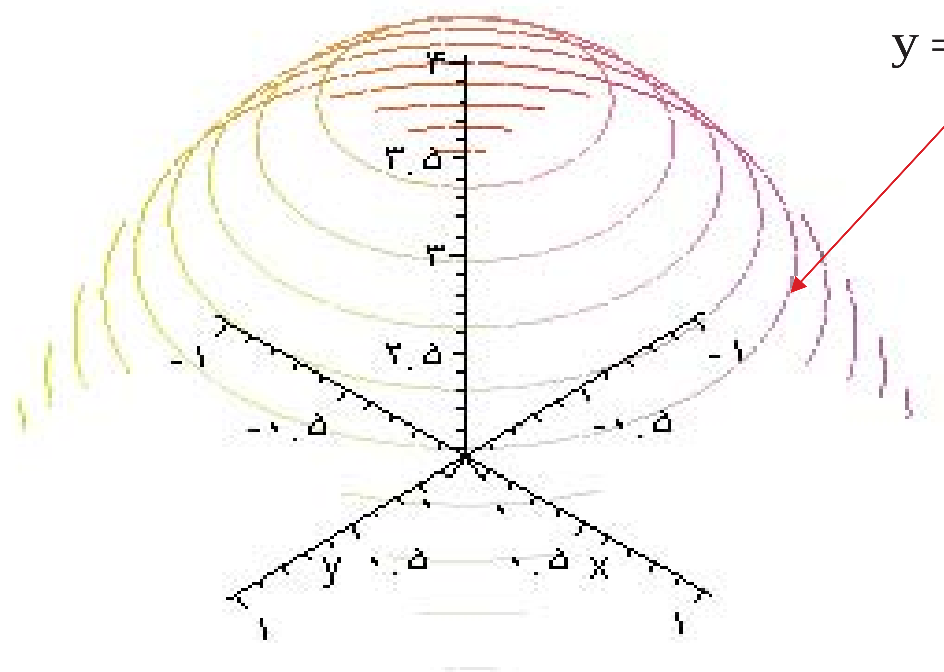
$$z = 4 - x^2 - y^2$$

مقطع این نمودار ها با صفحه های $x = 0$ و $y = 0$ به ترتیب سهمی های

$$z = 4 - x^2 \qquad , \qquad z = 4 - y^2$$

هستند.

$$y = \sqrt{4 - x^2}$$

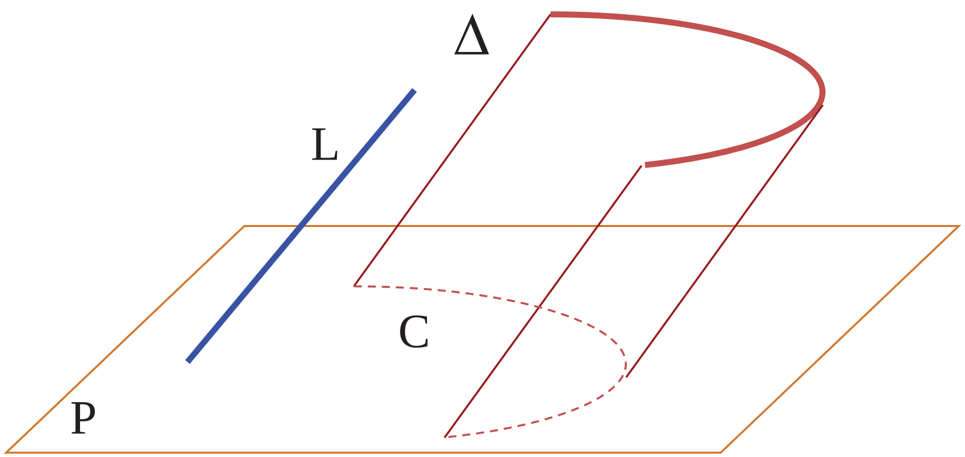


رویه های استوانه و رویه های دوار

تعریف:

فرض کنید C خمی واقع بر صفحه ای چون P و L خطی ناواقع براین صفحه است که باآن موازی نیست. خطی که متکی بر C و موازی با L حرکت کند رویه ای تولید می کند. این رویه را استوانه یا **رویه استوانه ای** می نامیم.

خم C را هادی استوانه وهر یک از خطهای موازی با L و متکی بر خم C را یک **مولد** استوانه می نامیم.



مثال:

می دانیم که معادله های $x^2 + y^2 = 1 \quad , \quad z = 0$

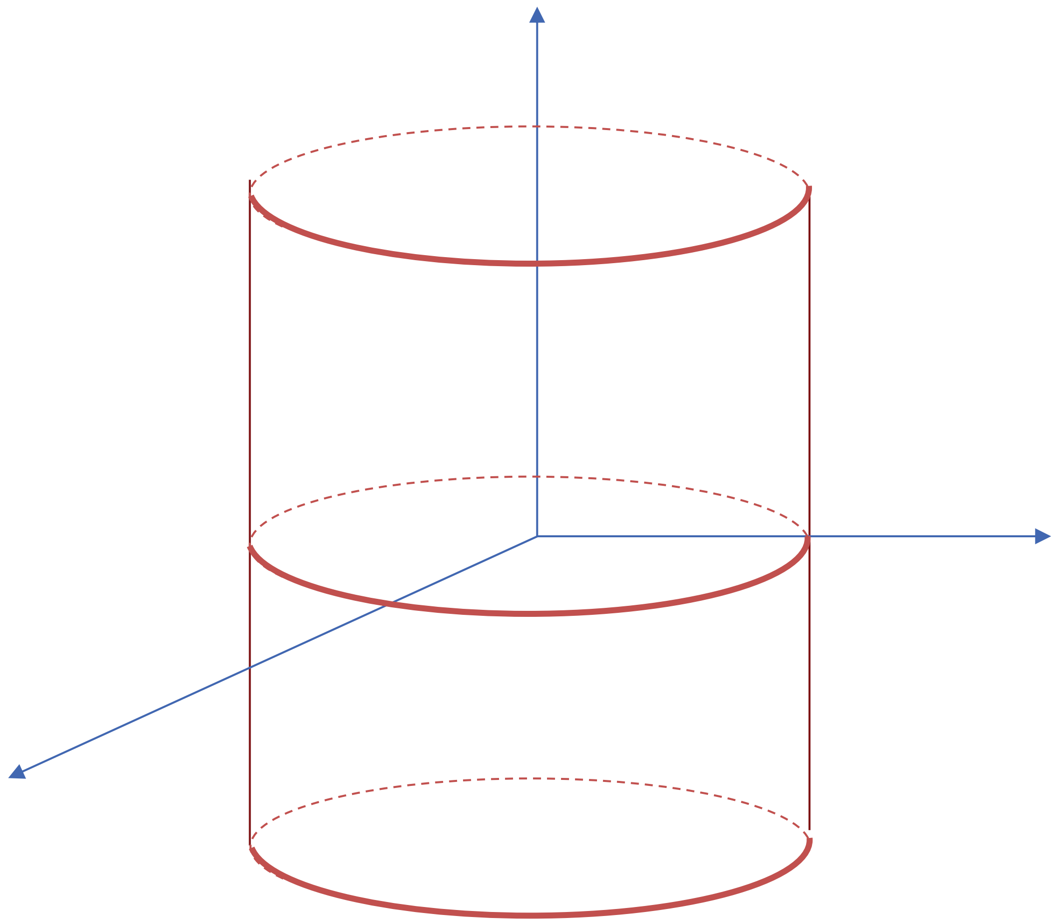
معادله های دایره به مرکز $(0, 0, 0)$ و شعاع $r = 1$ در صفحه xoy هستند. حال

اگر خطی بر این دایره تکیه و موازی با محور z حرکت کند ، یک استوانه قائم

پدید می آورد.

مثالهای دیگری از استوانه ها در فضا:

در شکل زیر قسمتی از این استوانه نشان داده شده است.



معادله استوانه در حالت کلی:

به طور کلی هر خم C در فضای سه بعدی R^3 مجموعه جواب های یک دستگاه

دو معادله سه مجهولی است. حال اگر این معادله هارا

$f(x,y,z) = 0$ و $g(x,y,z)$

بنامیم آنگاه خم C را به صورت

$$C:\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$$

نشان می دهیم.

حال فرض کنید هادی استوانه ای توسط دستگاه معادله های

$$C:\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases} \qquad (2)$$

داده شده باشد. اگر خط D یکی از مولدهای این استوانه ای باشد، D را

می توان فصل مشترک دو صفحه در نظر گرفت، یعنی

$$D:\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=\lambda \\ a_2x+b_2y+c_2z=\mu \end{cases} \qquad (3)$$

توجه کنید که وقتی در این دستکاه λ و μ تغییر کنند خطوط موازی D

حاصل می شوند.

حال فرض کنید $A(x,y,z)$ نقطه ای روی استوانه ای باشد. دراین صورت λ و

μ باید چنان اختیار شوند که نقطه $A(x,y,z)$ در معادله های (۳) صدق کند.

از طرف دیگر به ازای این مقادیر λ و μ خط D باید خم C قطع کند ،بنابراین

D وC باید در نقطه ای چون $B(s,t,u)$ مشترک باشند. یعنی این نقطه باید در

معادله های (۲) و(۳) به طور همزمان صدق کند ، یعنی

$$\begin{cases} f(s,t,u)=0 \\ g(s,t,u)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 s + b_1 t + c_1 u = \lambda \\ a_2 s + b_2 t + c_2 u = \mu \end{cases}$$

اکنون بین این معادله ها u , t , s را حذف می کنیم و در معـــــادله حاصل

قرار می دهیم

$$\lambda = a_1 x + b_1 y + c_1 z \qquad , \qquad a_2 x + b_2 y + c_2 z = \mu$$

ومعادله استوانه را در نظر می گیریم.

مثال:

می خواهیم معادله استوانه ای را بنویسیم که C هادی آن دارای معادله های

$$\begin{cases} y = 4x^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

ومولد آن موازی خط x = y = zباشد.

حل:

معادله های مولد را به صورت

$$D: \begin{cases} x - y = \lambda \\ x - z = \mu \end{cases}$$

در نظر می گیریم. حال از دستگاه معادله های

$$\begin{cases} y = 4x^2 \\ z = 0 \\ x - y = \lambda \\ x - z = \mu \end{cases}$$

z,y, x را حذف می کنیم ، نتیجه می شود .

$$x=\mu \quad , \quad y=\mu-\lambda \quad , \quad (\mu-\lambda)=4\mu^2$$

در نتیجه معادله استوانه مورد نظر عبارتست از

$$(x-z-x+y)=4(x-z)^2$$

یا

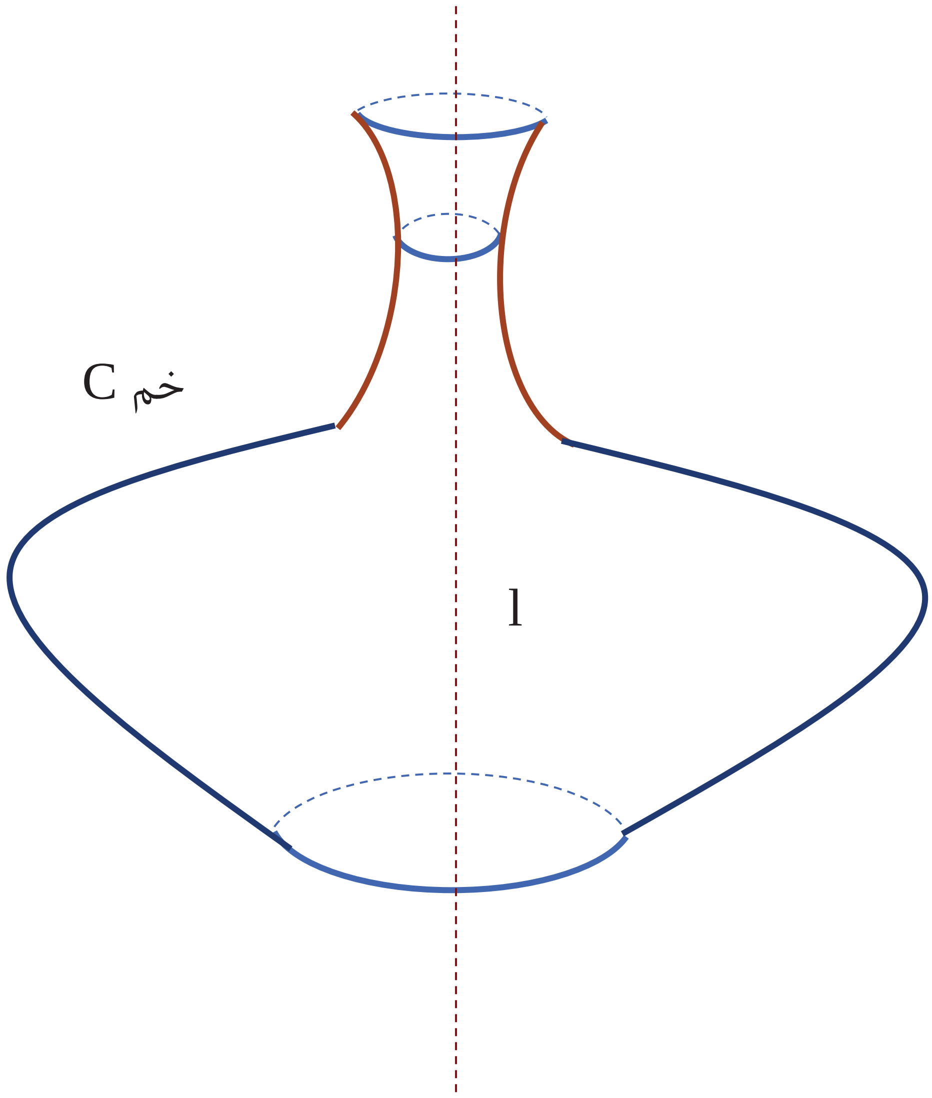
$$4x^2+4z^2-8xz-y+z=0.$$

رویه دوار

تعریف

خم C و خط l را که هردو روی یک صفحه هستند ، در نظر می گیریم. اگر C حول l دوران کند ، رویه ای به نام **رویه دوار** حاصل می شود . خم C را یک مولد و خط l را **محور دوران** این رویه می نامیم.

روش نوشتن معادله رویه دوار :در صورتی که منحنی در یکی از صفحات مختصات و محور دوران یکی از محور های مختصات باشد کافی است در معادله منحنی فقط بجای نام متغیری که محور دوران نیست جذر مجموع مربعات دو محور غیر دوران را جایگذاری کنیم.



می خواهیم معادله رویه دوار ی را که از دوران خم C حول محور l پدید می آید بدست آوریم.

معادله منحني	محور دوران	معادله رويه دوار
$F(x,y)=0$ $Z=0$	محور x محور y	$F(x, \sqrt{y^2+z^2})=0$ $F(\sqrt{x^2+z^2}, y)=0$
$F(y,z)=0$ $X=0$	محور y محور z	$F(y, \sqrt{x^2+z^2})=0$ $F(\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$
$F(z,x)=0$ $y=0$	محور z محور x	$F(z, \sqrt{x^2+y^2})=0$ $F(\sqrt{y^2+z^2}, x)=0$

مثال: رویه حاصل از دوران خم xy=1 حول محور x را پیدا کنید.

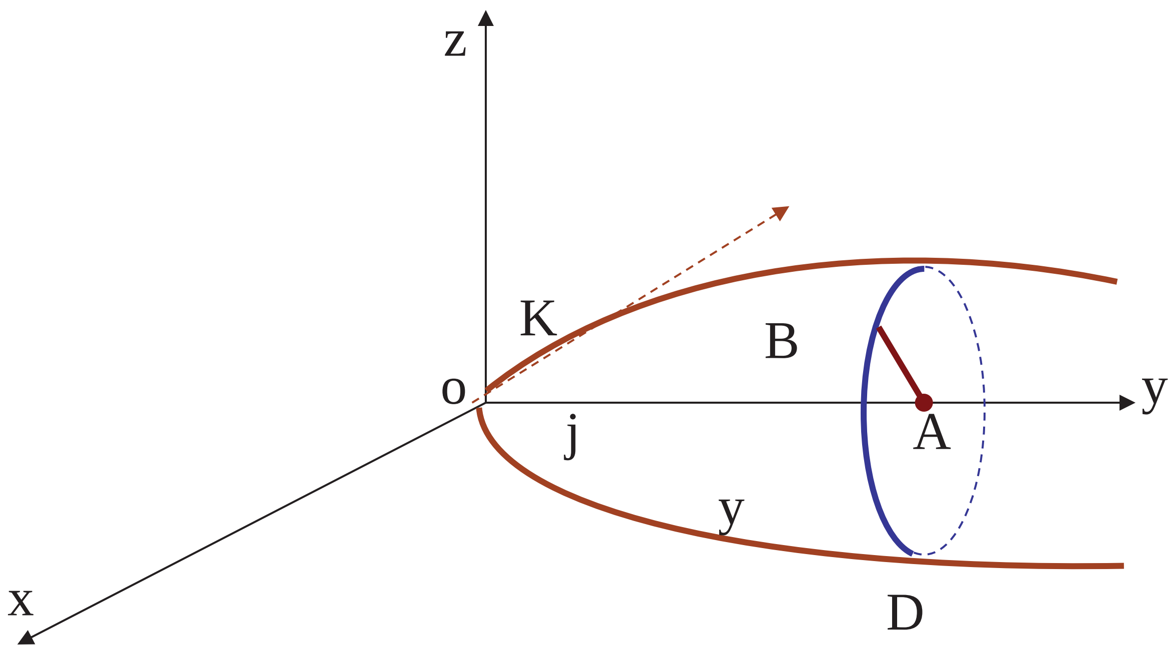
حل:

$$x\sqrt{y^2+z^2}=1$$

مثال: خم $y = x^2$ حول محور y دوران می کند، معادله رویه دوار حاصل را پیدا کنید.

حل:

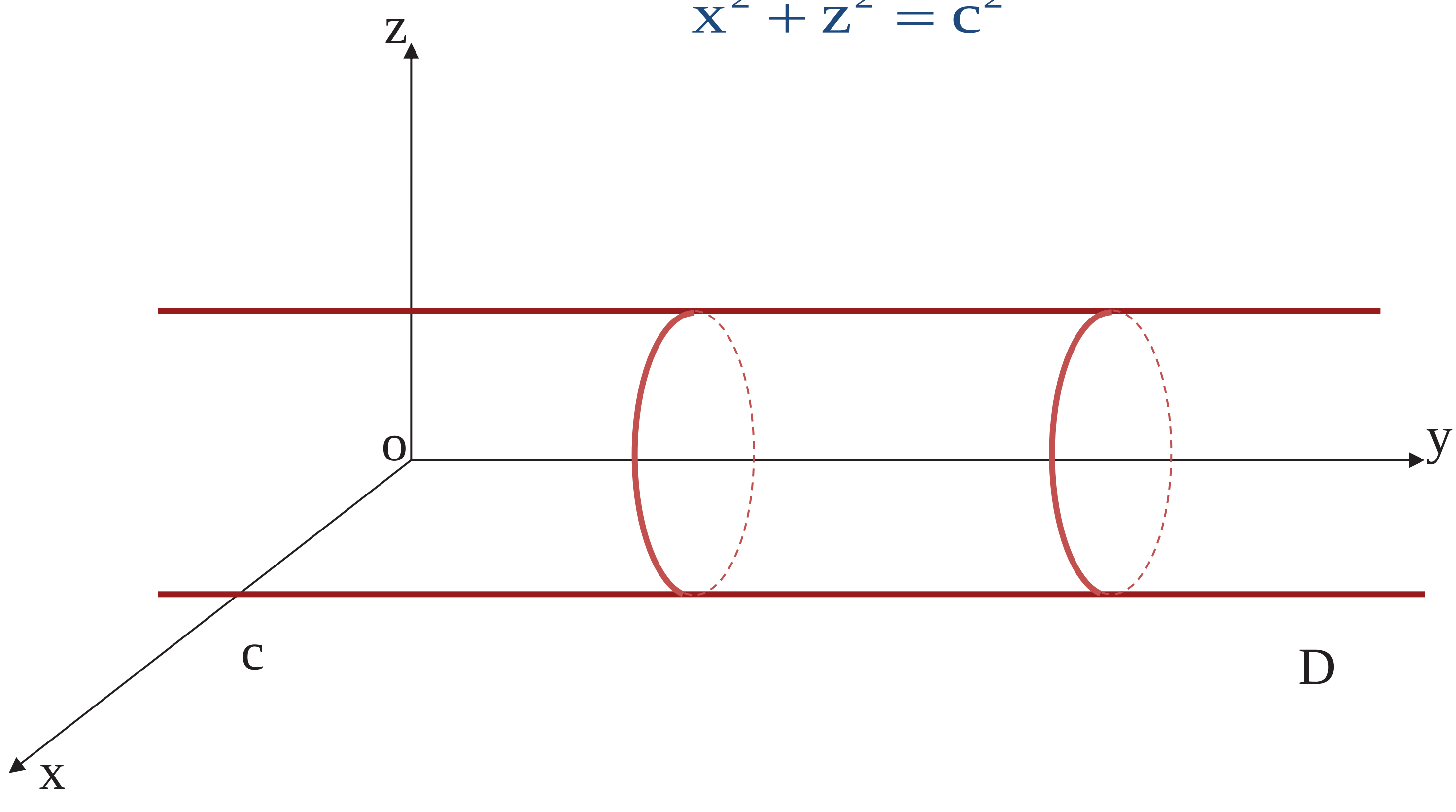
$$y = x^2 + z^2$$



مثال

فرض کنید خط D واقع بر صفحه xoy و موازی با محور y (خط $x=c$)، حول این محور دوران کند. در این صورت یک استوانه پدید می آید که معادله آن عبارت است از:

$$x^2 + z^2 = c^2$$



رویه های در جه دوم

اکنون که با رویه های استوانه ای و رویه های دوار آشنا شدیم، رویه هایی را معرفی می کنیم که تعمیم طبیعی خمهای درجه دوم ، یعنی مقاطـــــع مخروطی هستند.این رویه ها،رویه های درجه دوم نامیده می شونـــد.

کره یک مثالی از یک رویه در جه دوم است.

تعریف

نمودار معادله درجه دوم سه مجهولی

❊ $$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

را که درآن $J, I, H, G, F, E, D, C, B, A$ اعداد ثابت و F, E, D, C, B, A همه صفر نیستند، یک **رویه درجه دوم** می نامیم.

✵به عبارت دیگر یک رویه درجه دوم مجموعه نقاطی چون (x,y,z) متعلق

به فضای سه بعدی R^3 است که در معادله ❊ صدق می کنند.

مثال

در معادله ❋ قرار می دهیم

الف) $A = B = C = 1 = -J$ و $D = E = F = G = H = I = 0$ و به دست می آوریم:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

مشاهده می کنیم که این معادله ، معادله کره به مرکز (۰و ۰و ۰) و شعاع ۱

است، بنابراین می توان ادعا کرد که برخی از رویه های دوار رویه در جـــه

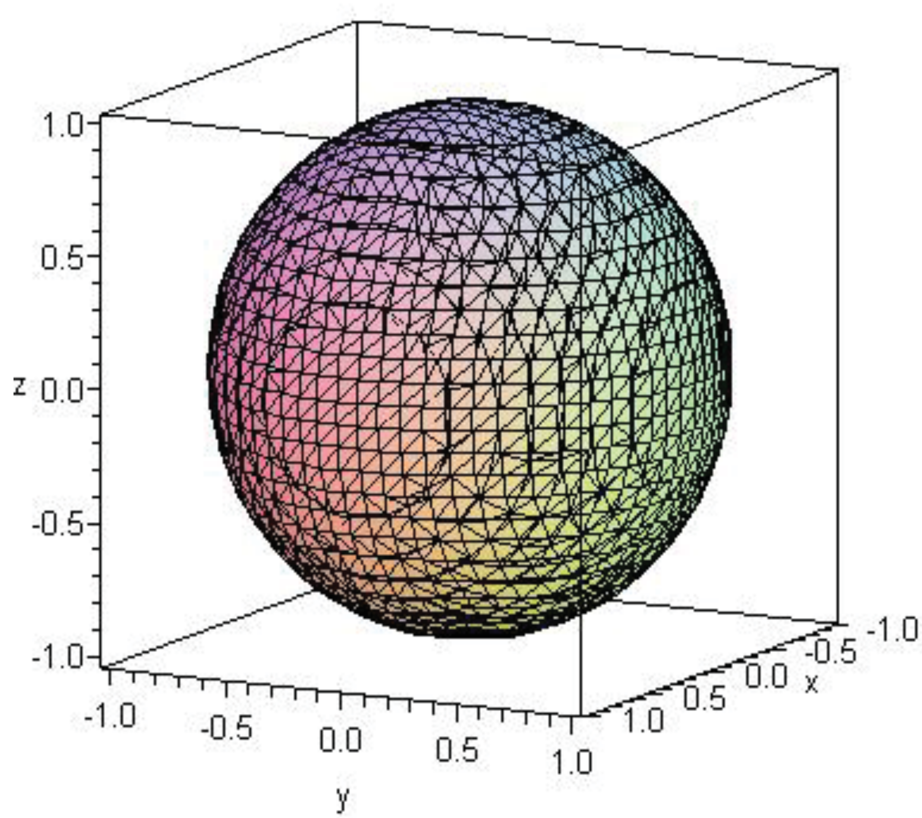
دوم نیز هستند.

ب) با قرار دادن $A = B = 1$ و $I = -1$ و $C = D = E = F = G = H = J = 0$ و
به دست می آوریم.

$$z^2 = x^2 + y^2$$

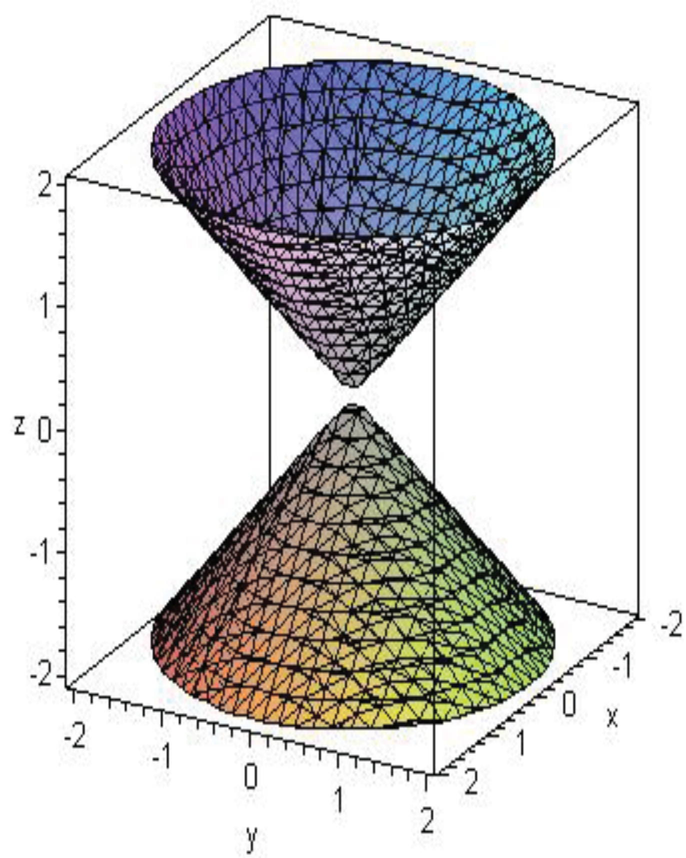
✵ این معادله معرف مخروطی گون دوار است . بنابراین مخروطی گون دوار نمونه
دیگری ازیک رویه درجه دوم است.

کره به معادله $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

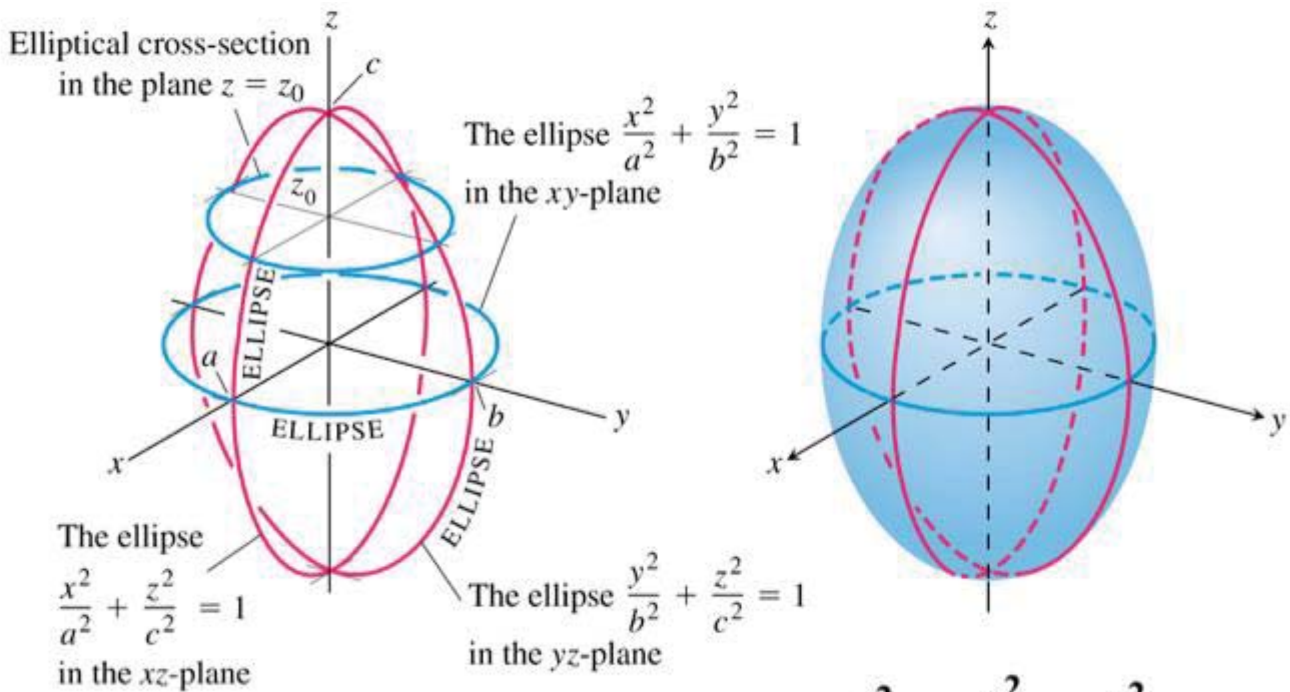


مثال: طول مختصات مرکز کره ای که صفحات $x+y+z-3=0$ و $x+y+z-9=0$ بر آن مماس بوده و صفحات $2x-y=0$ و $3x-z=0$ از مرکز آن می گذرند را به دست آورید.

مخروطی دوار به معادله $z^2 = x^2 + y^2$



بيضوي (بيضيگون):



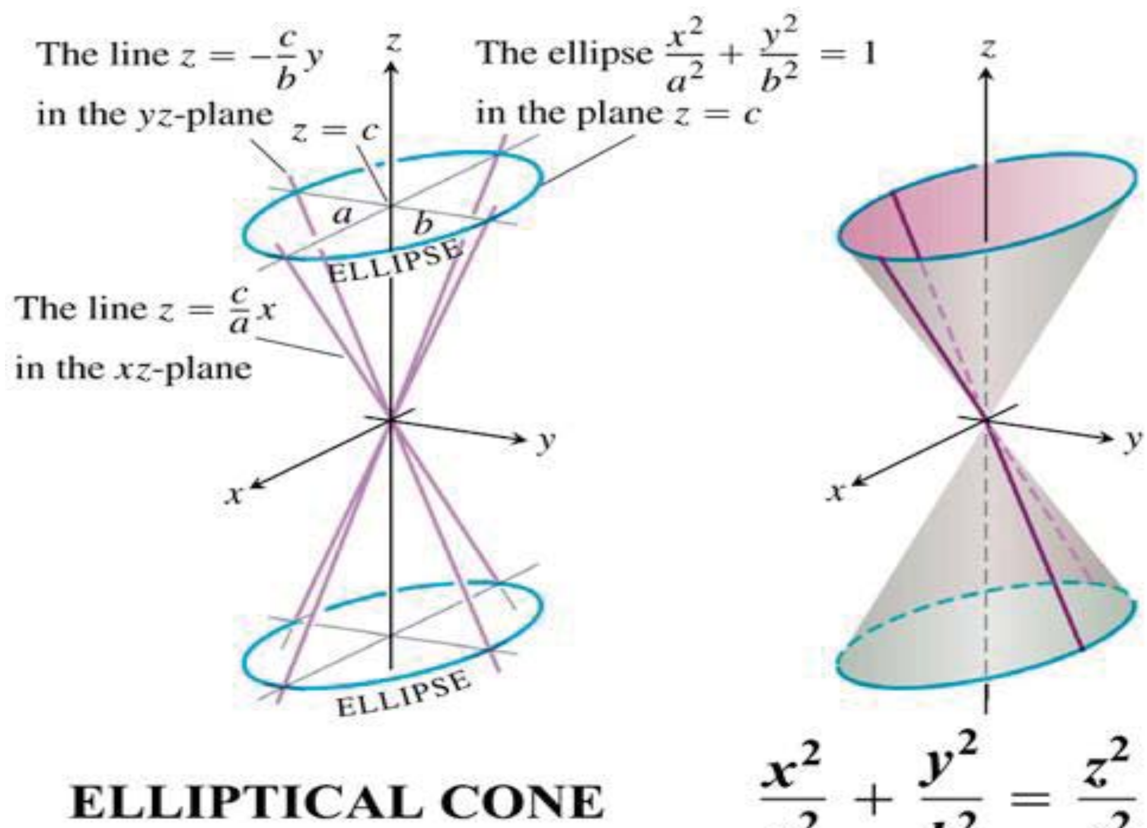
ELLIPSOID

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

روش شناخت:

سه جمله مربع هم علامت سمت چپ وعدد يك سمت راست تساوي.

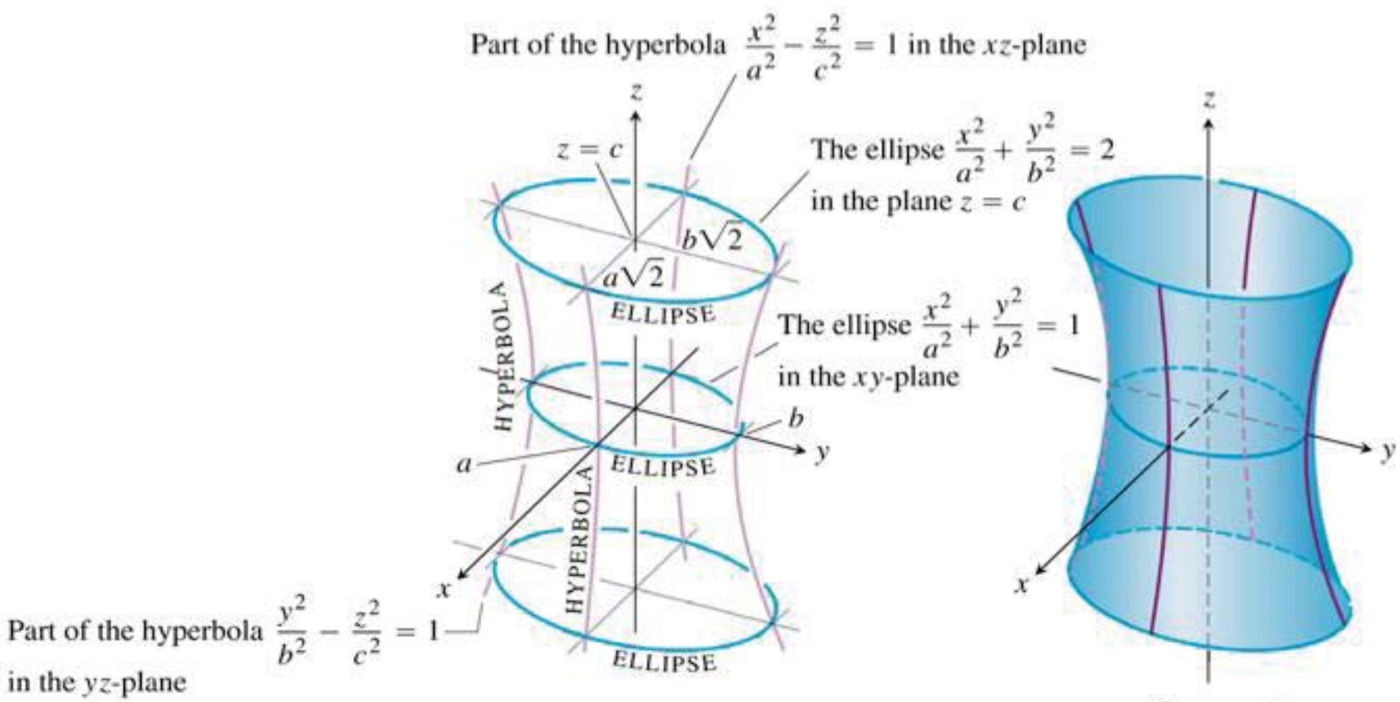
مخروط بیضوی:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

- روش شناخت:
- دو جمله مربع در يك سمت ويك جمله مربع در سمت ديگر تساوي (جمله تكي نشان دهنده محور است).

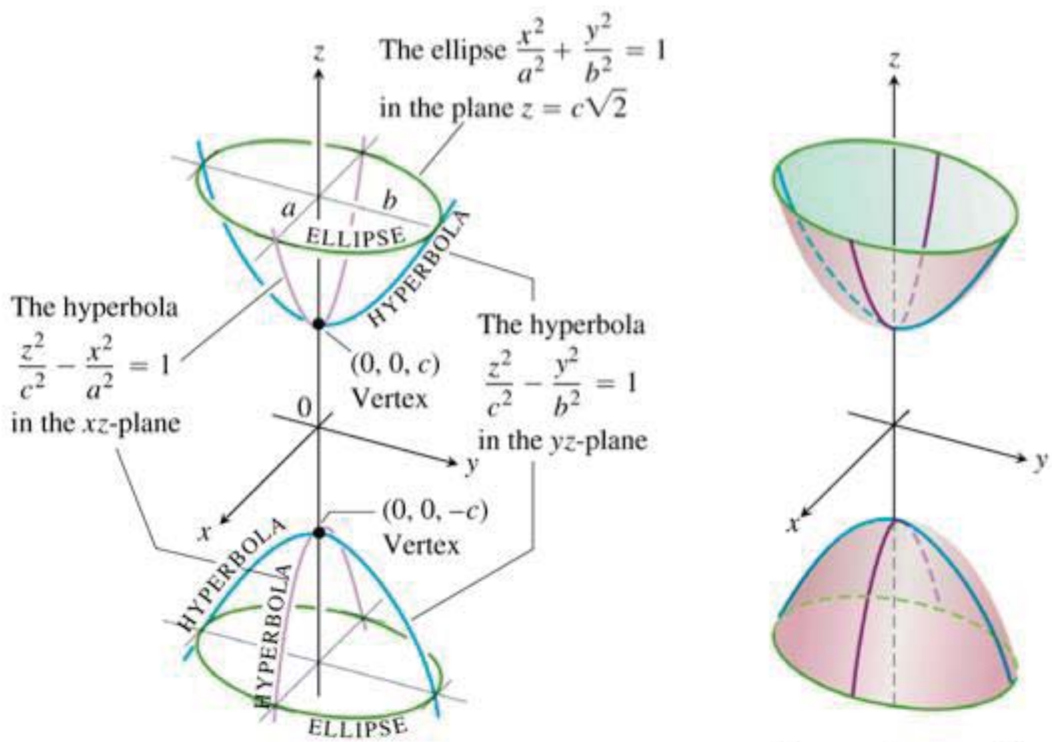
هذلولی گون یکپارچه:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- روش شناخت:
- سه جمله مربع که فقط يك جمله منفي (که نشان دهنده محور شکل است) سمت چپ وعدد يك سمت راست تساوي.

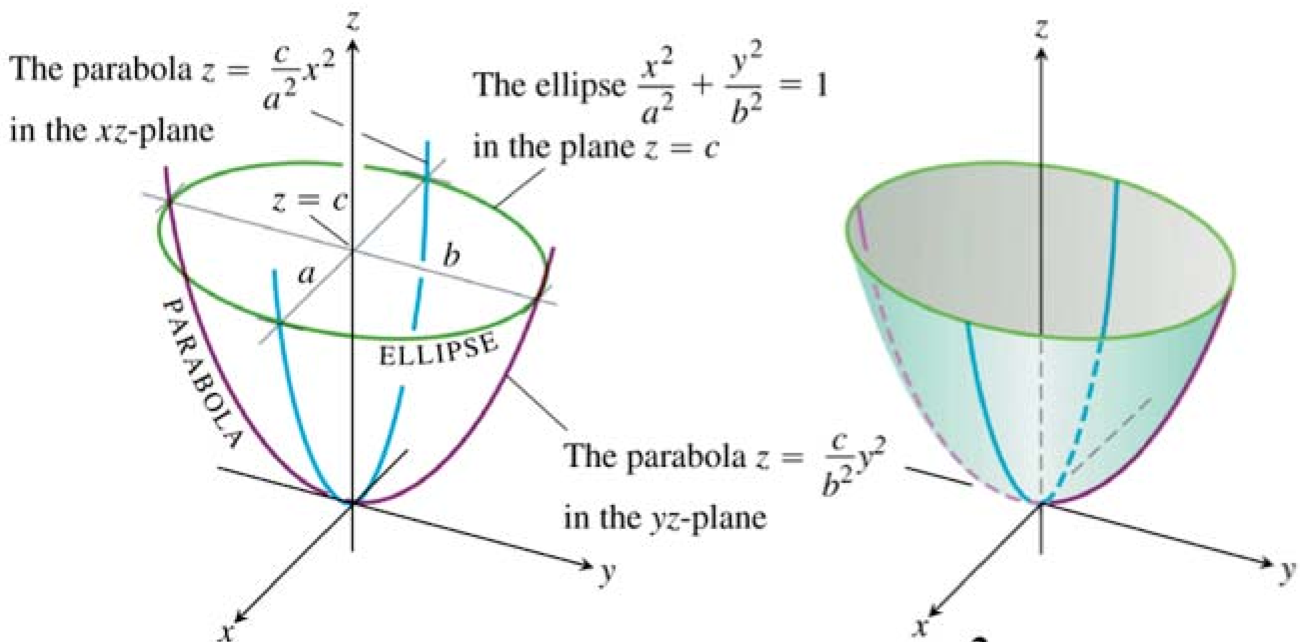
هذلولی گون دوپارچه:



HYPERBOLOID OF TWO SHEETS $\quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

- روش شناخت:
- سه جمله مربع كه دو جمله منفي سمت چپ (جمله مثبت نشان دهنده محور است) وعدد يك سمت راست تساوي.

سهمی گون بیضوی:

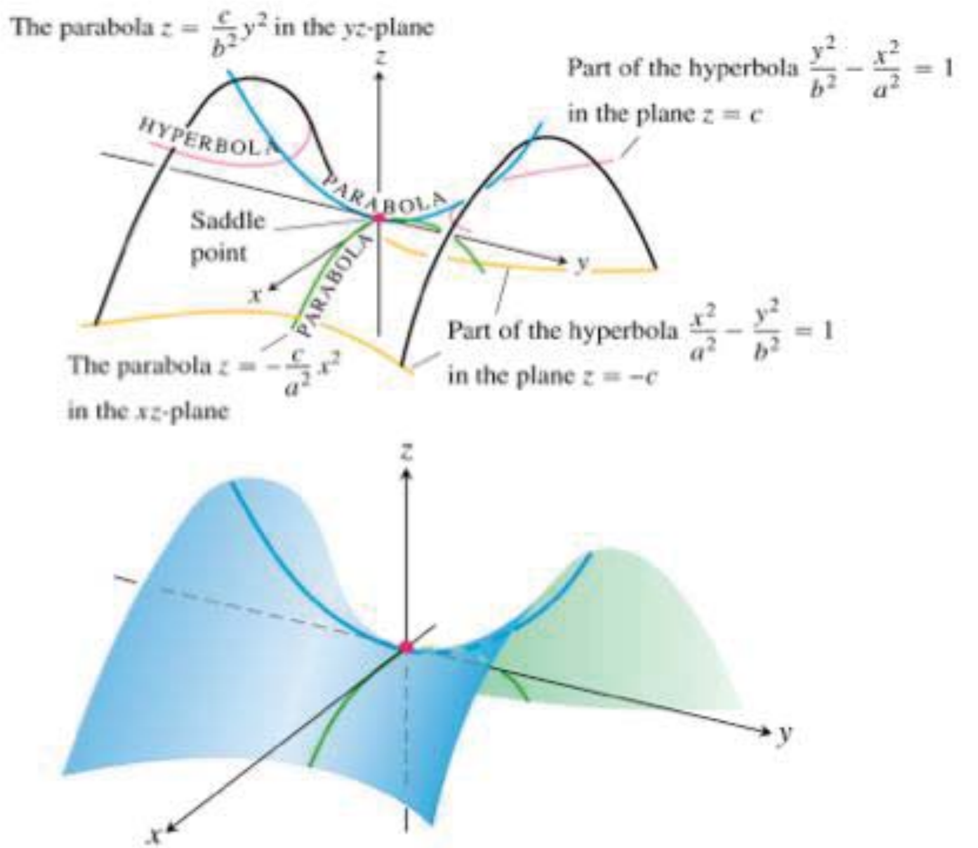


ELLIPTICAL PARABOLOID

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

- روش شناخت:
- دو جمله مربع در يك سمت ويك جمله درجه يك در سمت ديگر تساوي همه جملات هم علامت (جمله درجه يك نشان دهنده محور است).

سهمي گون هذلولوي(زين اسبي):



HYPERBOLIC PARABOLOID $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}, \quad c > 0$

- روش شناخت:
- دو جمله مربع مختلف العلامه در يك سمت ويك جمله درجه يك در سمت ديگر تساوي (جمله درجه يك نشان دهنده محور است)

مثال: رویه زیر را شناسایی کنید:

$$6x^2 + 2y^2 - 3z^2 + y = 0$$

مثال

قسمتی از خم فصل مشترک رویه های

الف) $x^2+y^2=2x$

ب) $x^2+y^2+z^2=4$

را که در یک هشتم اول دستگاه مختصات xyz است رسم می کنیم.

حل:

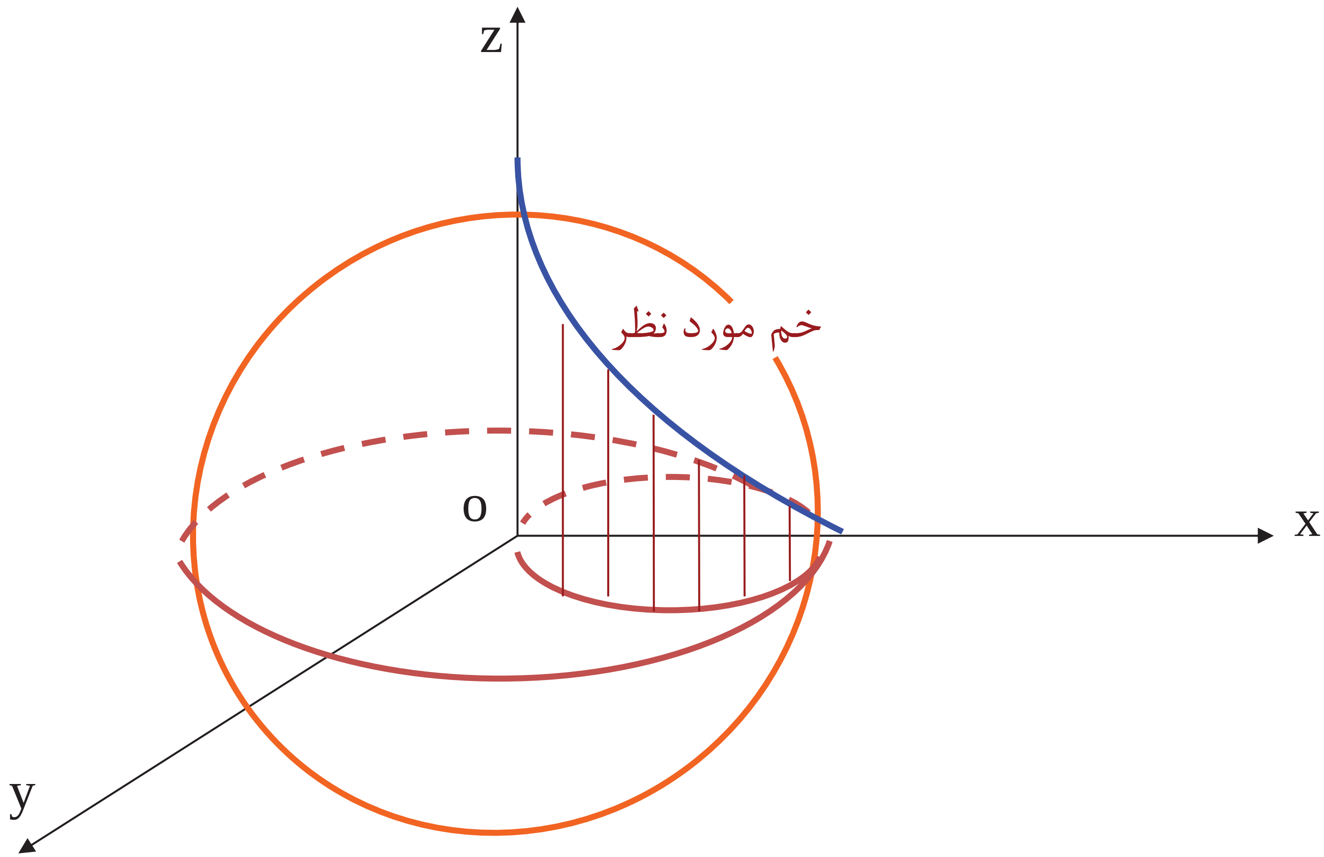
بنابر تعریف یک هشتم اول دستگاه مختصات xyz مجموعه نقاط (x,y,z) است که $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$. خم مورد نظر از تلاقی استوانه

$$(x-1)^2+y^2=1$$

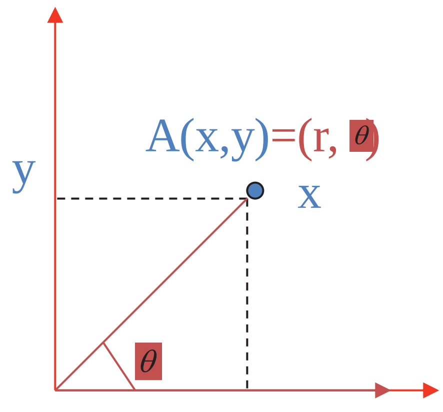
با کره زیر به دست می آید.

$$x^2+y^2+z^2=4$$

در شکل زیر این خم را با تعویض نقش محور های x و y رسم کرده ایم.



مختصات قطبي:



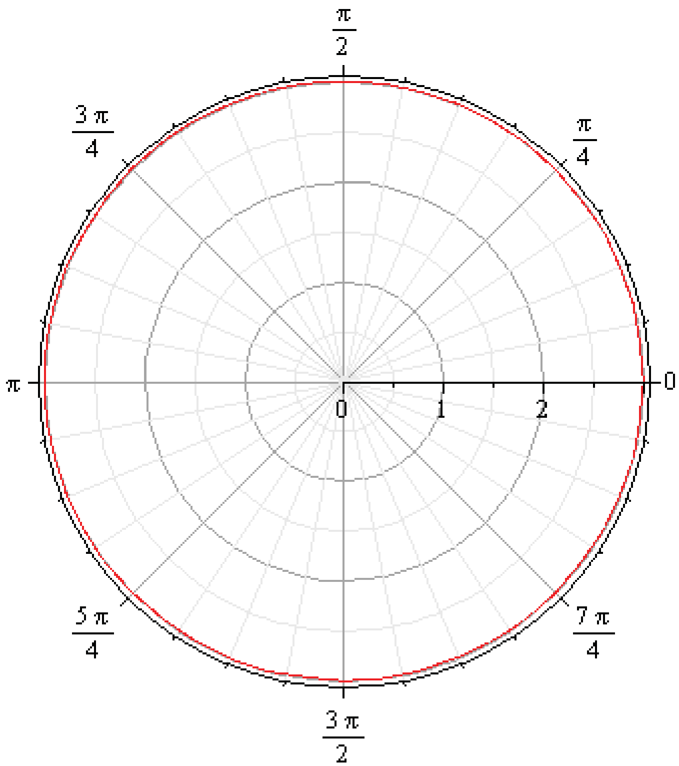
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

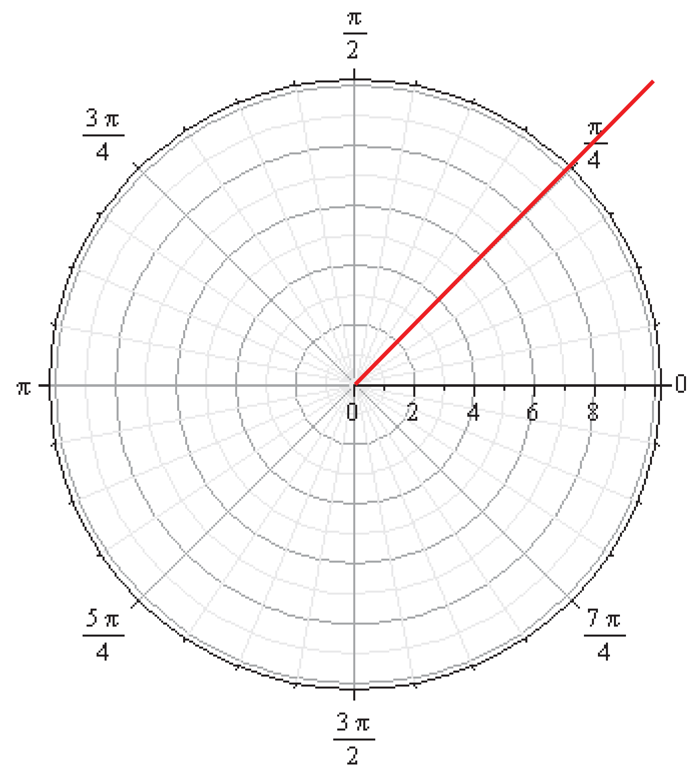
قرارداد:

$$r \geq 0, \qquad 0 \leq \theta < 2\pi$$

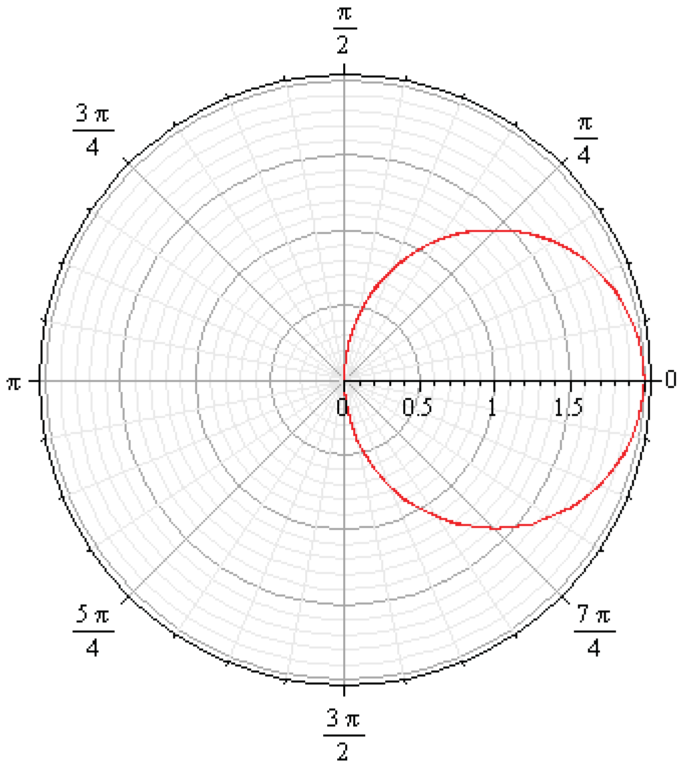
چند منحنی در فرم قطبی:



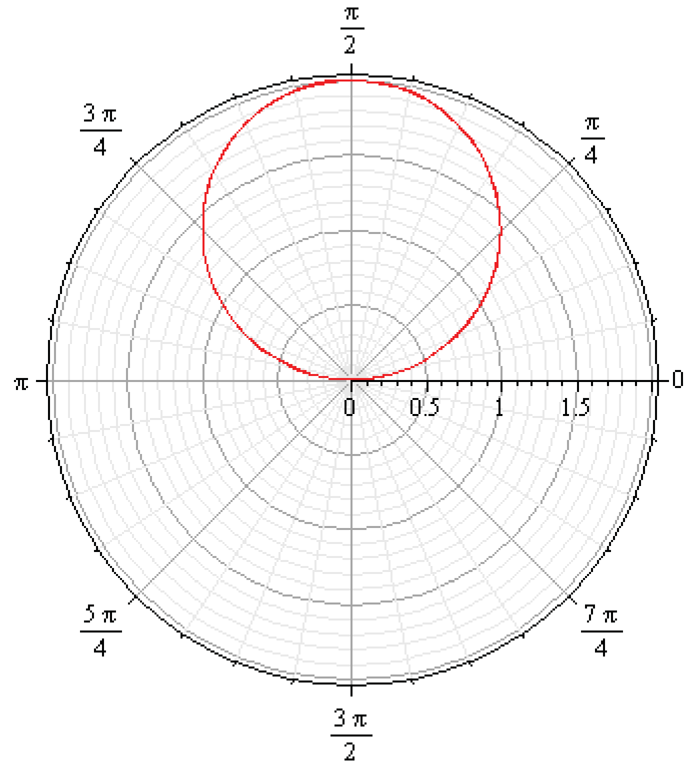
$$r = a$$



$$\theta = a$$

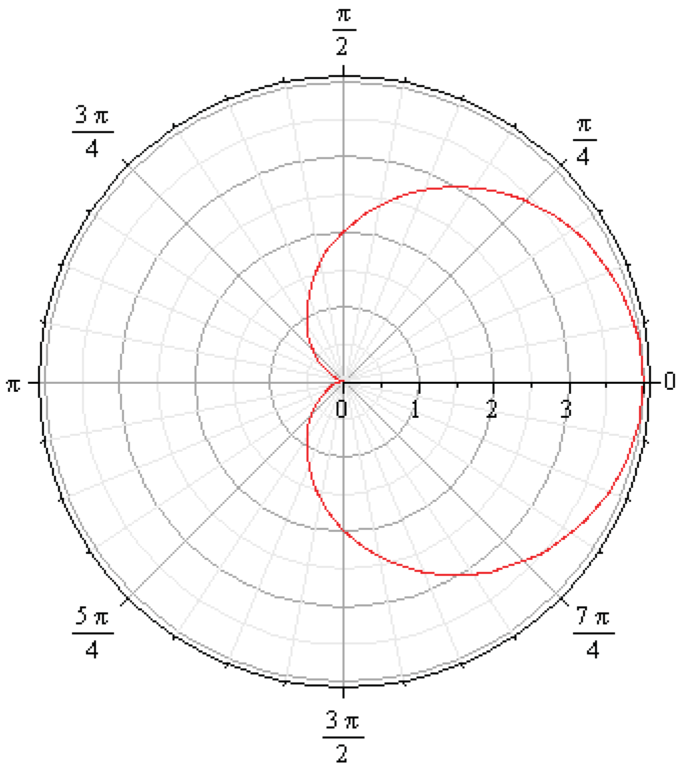


$r = 2a\cos\theta$

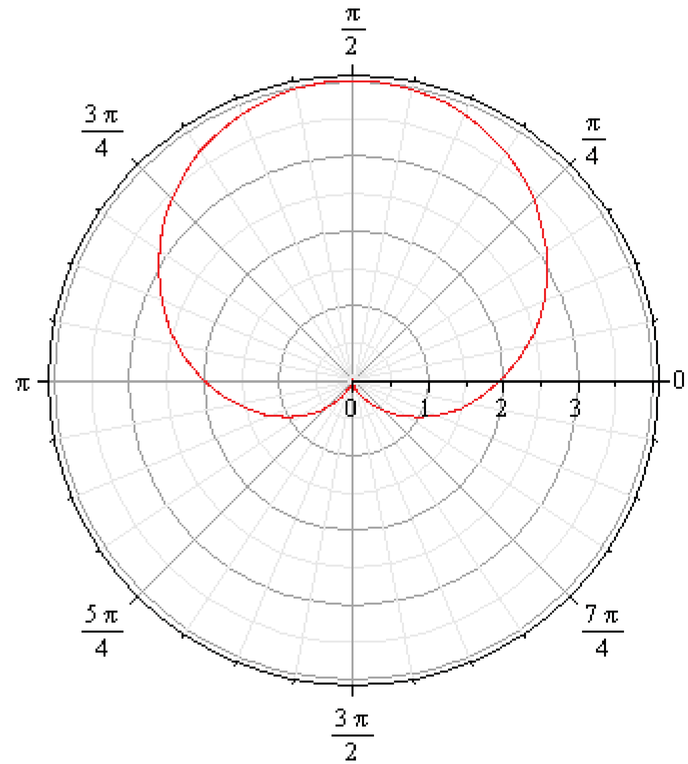


$r = 2a\sin\theta$

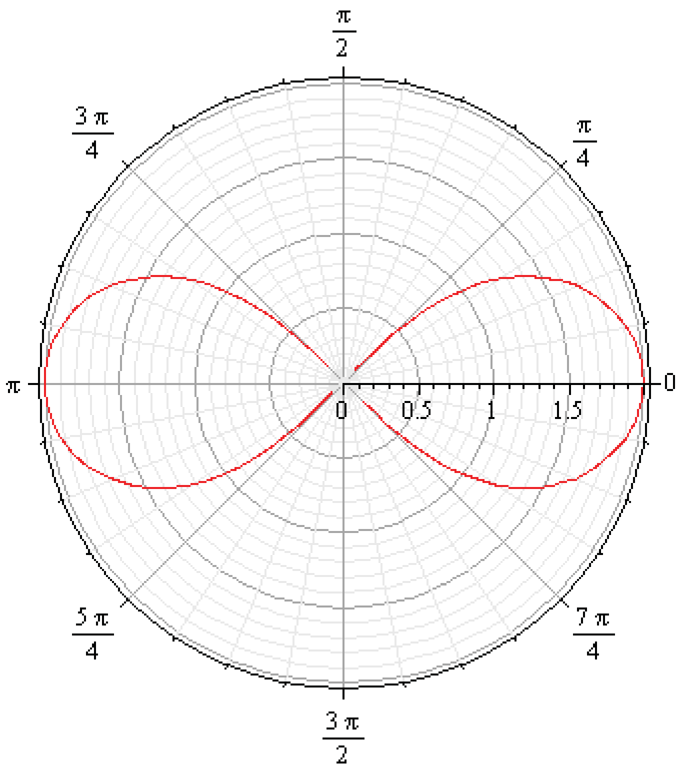
دلگون

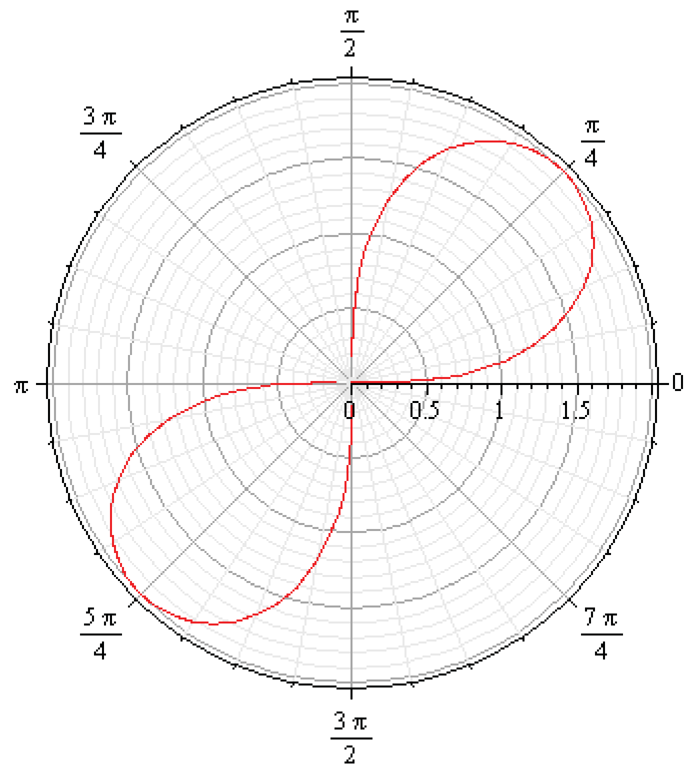


$$r = a(1+\cos\theta)$$



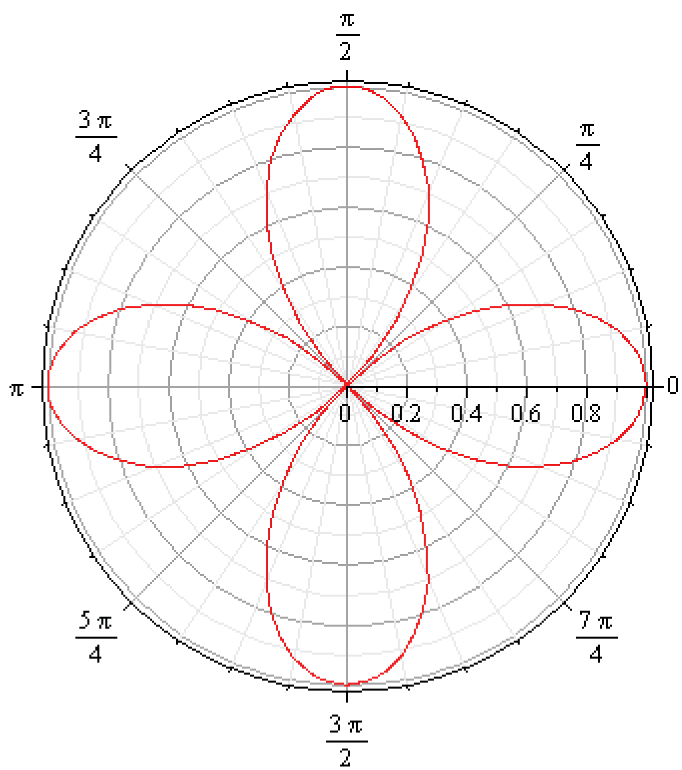
$$r = a(1+\sin\theta)$$



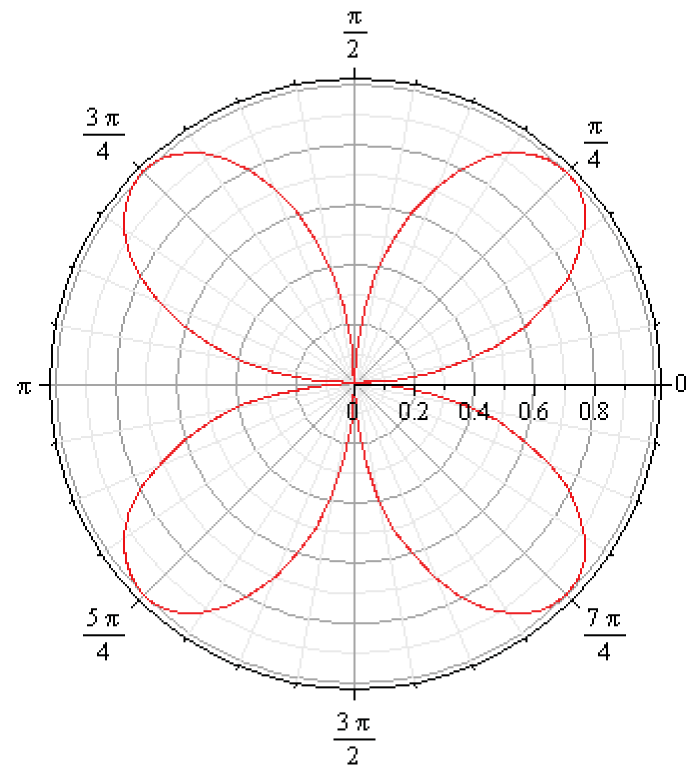


$$r = a\sqrt{\cos 2\theta}$$

$$r = a\sqrt{\sin 2\theta}$$

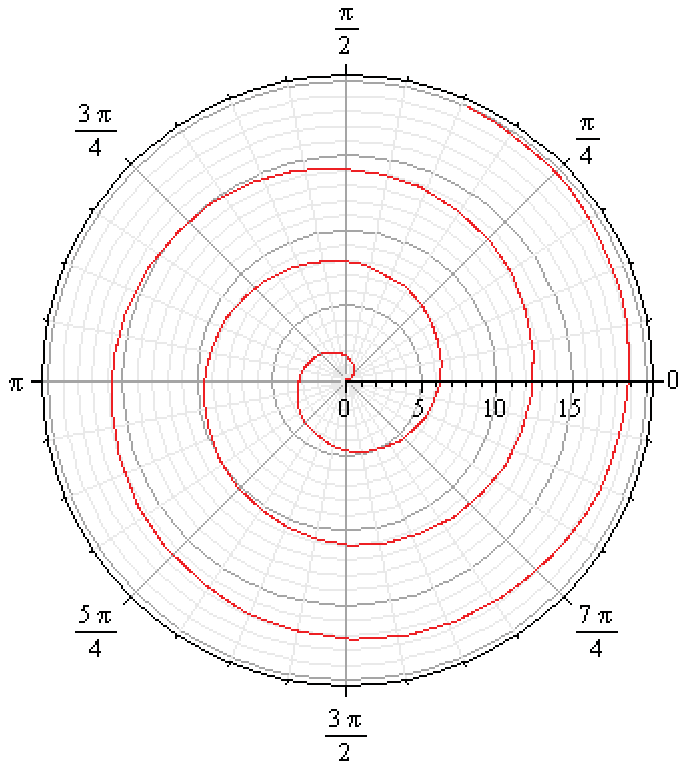


$$r = a\cos 2\theta$$



$$r = a\sin 2\theta$$

مارپیچ



$$r = \theta$$

مختصات استوانه ای:

فرض کنیم (x,y,z) مختصات دکارتی نقطه P در فضا باشد.اگر (r,θ) مختصات

قطبی نقطه (x,y) باشد، آنگاه (r,θ,z) را مختصات استوانه ای P می نامیم .

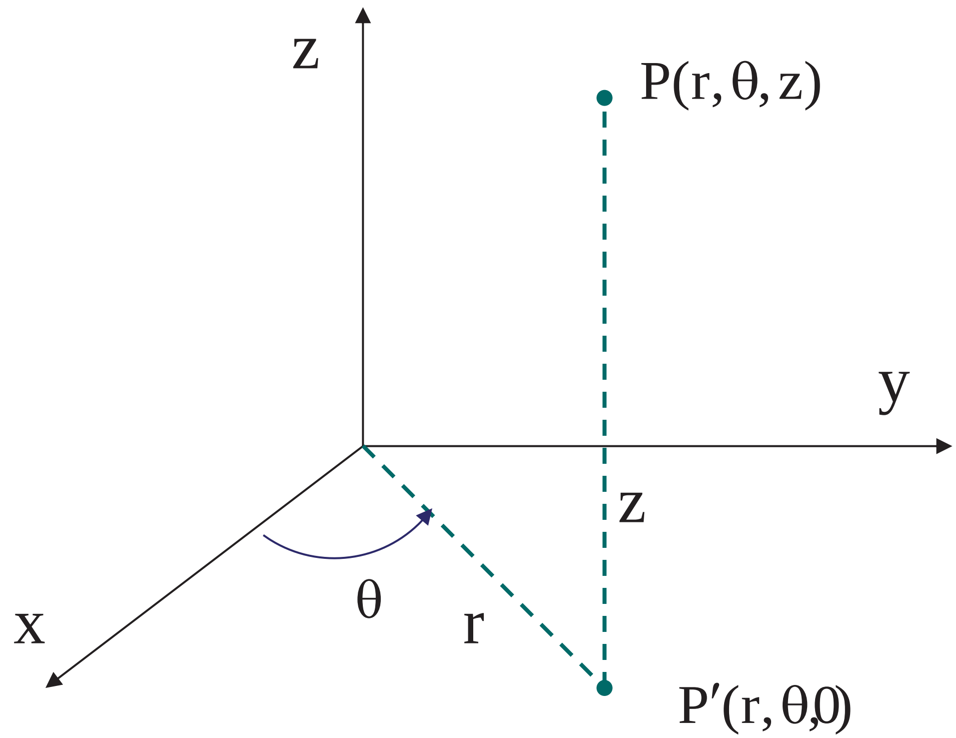
برای تبدیل مختصات دکارتی (x,y,z) به مختصات استوانه ای ، از فرمول های

$x^2+y^2=r^2$ و $\theta=\tan^{-1}(\frac{y}{x})$ استفاده می کنیم.

بر عکس ، برای تبدیل مختصات استوانه ای (r,θ,z) به مختصات دکارتی ،

فرمول های $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ را به کار می بریم. معادلات استوانه ای

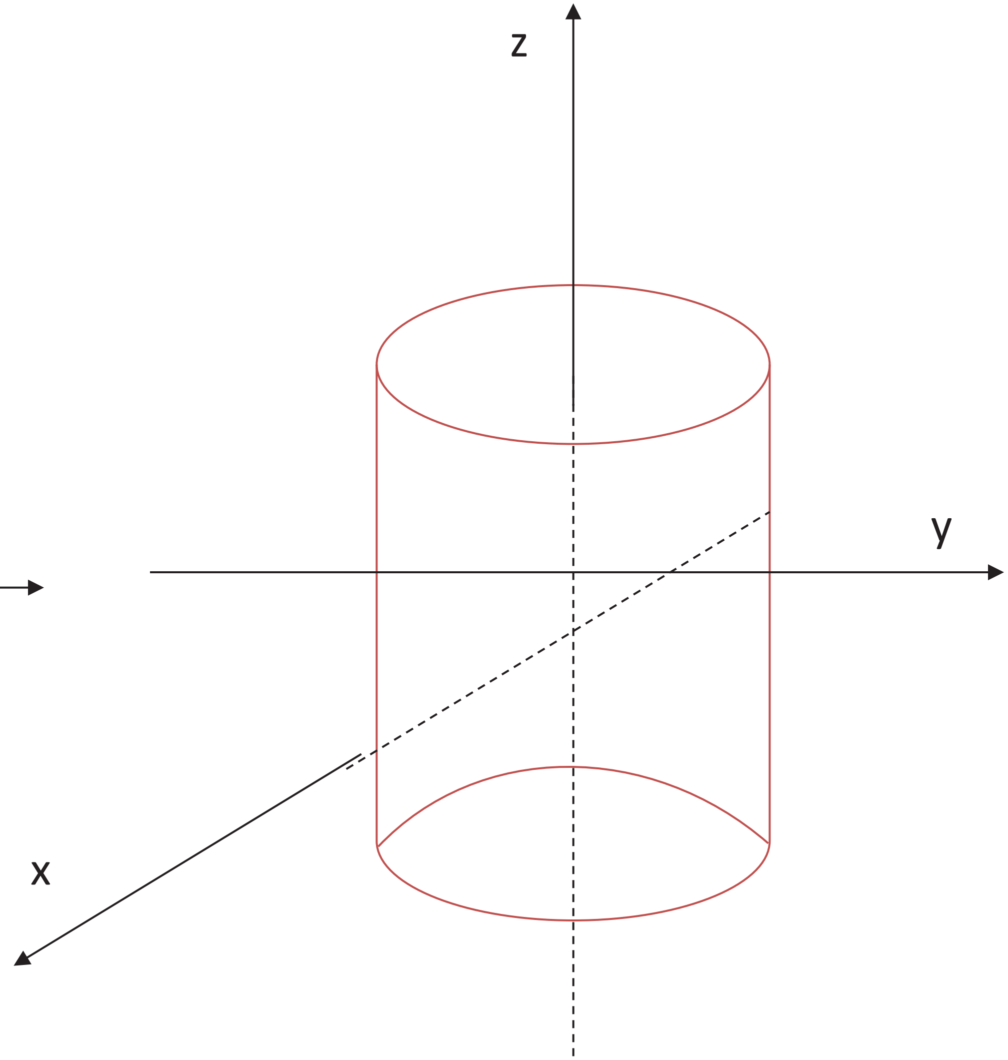
برخی از رویه های متداول را در جدول اسلاید بعدی ذکر می کنیم.



به عنوان مثال ، اگر $(2,2\sqrt{3},7)$ مختصات دکارتی نقطه P باشد، آنگاه

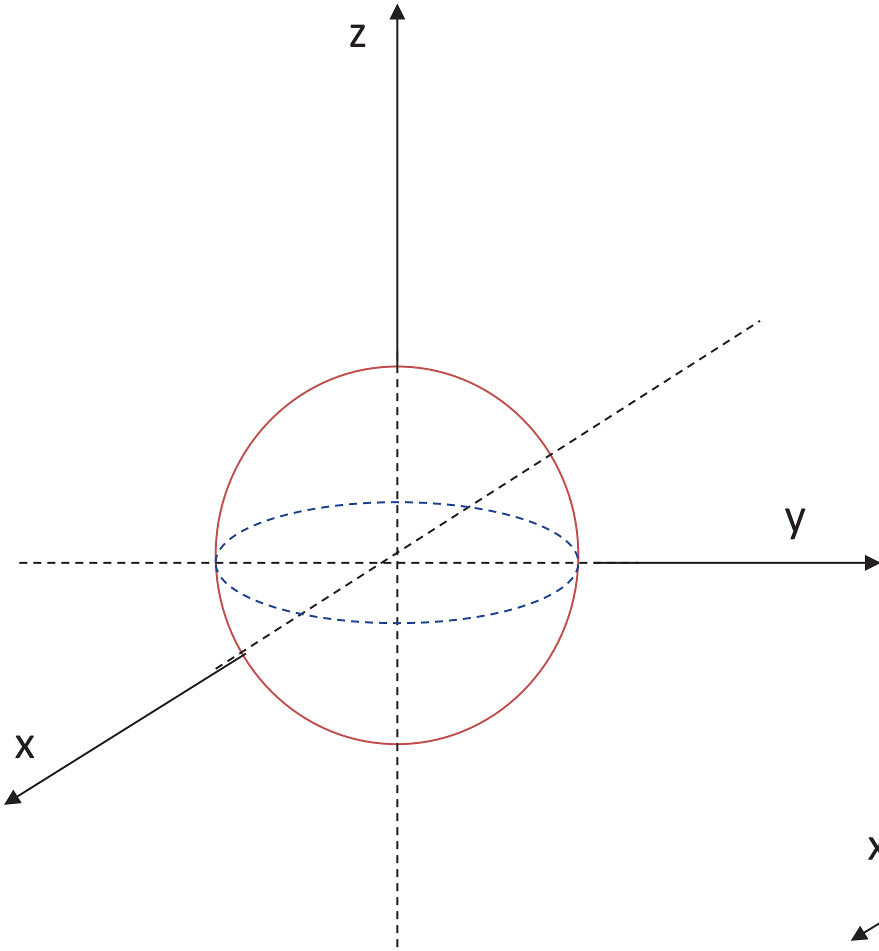
$(4,\frac{\pi}{3},7)$ مختصات استوانه ای این نقطه است.

رویه	معادله دکارتی	معادله استوانه ای
استوانه	$x^2+y^2=a^2$	$r=a$
کره	$x^2+y^2+z^2=a^2$	$r^2+z^2=a^2$
مخروط	$x^2+y^2=a^2z^2$	$r=az$
سهمیوار دوار	$x^2+y^2=az$	$r^2=az$



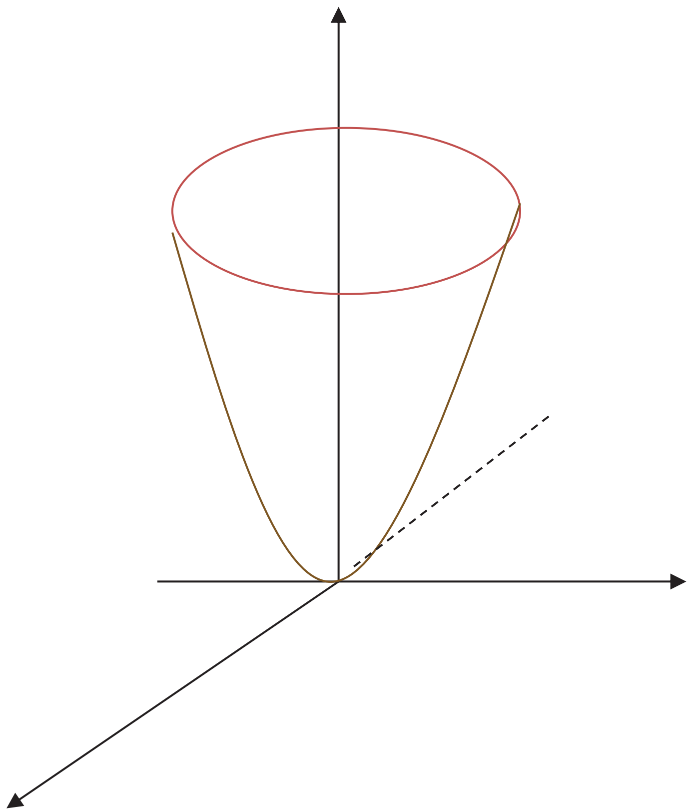
$$x^2 + y^2 = a^2$$
$$r = a$$

الف) استوانه)



$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$
$$r^2 + z^2 = a^2$$

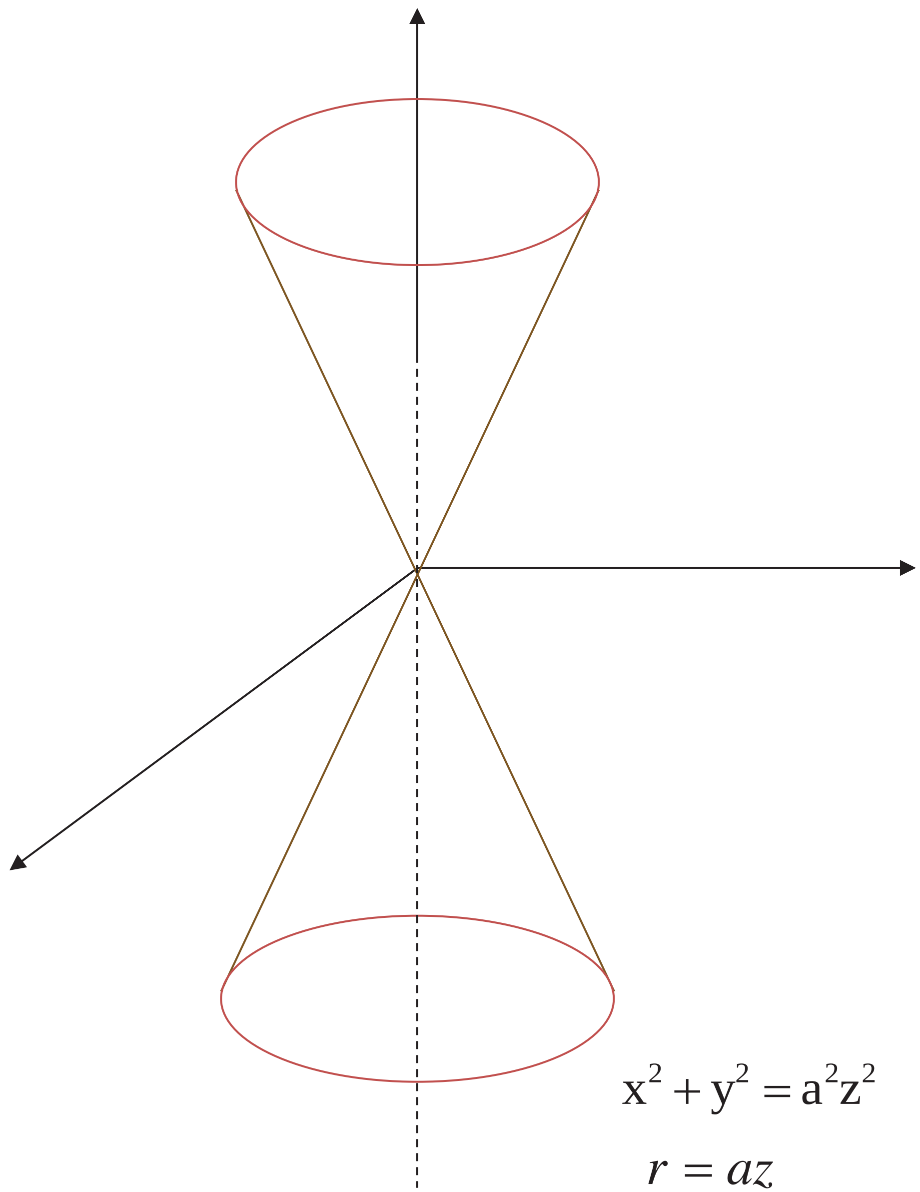
ب) کره)



$$x^2 + y^2 = az$$

$$r^2 = az$$

ت) سهمیوار)



$$x^2 + y^2 = a^2 z^2$$

$$r = az$$

پ) مخروط (دوپارچه))

دستگاه مختصات کروی

دراین دستگاه مختصات هر نقطه P، به جز مبدا مختصات ، توسط یک سه تایی

(ρ, φ, θ) که در آن $\rho = |\vec{OP}|$ و θ زاویه قطبی متناظر با تصویر قائـم

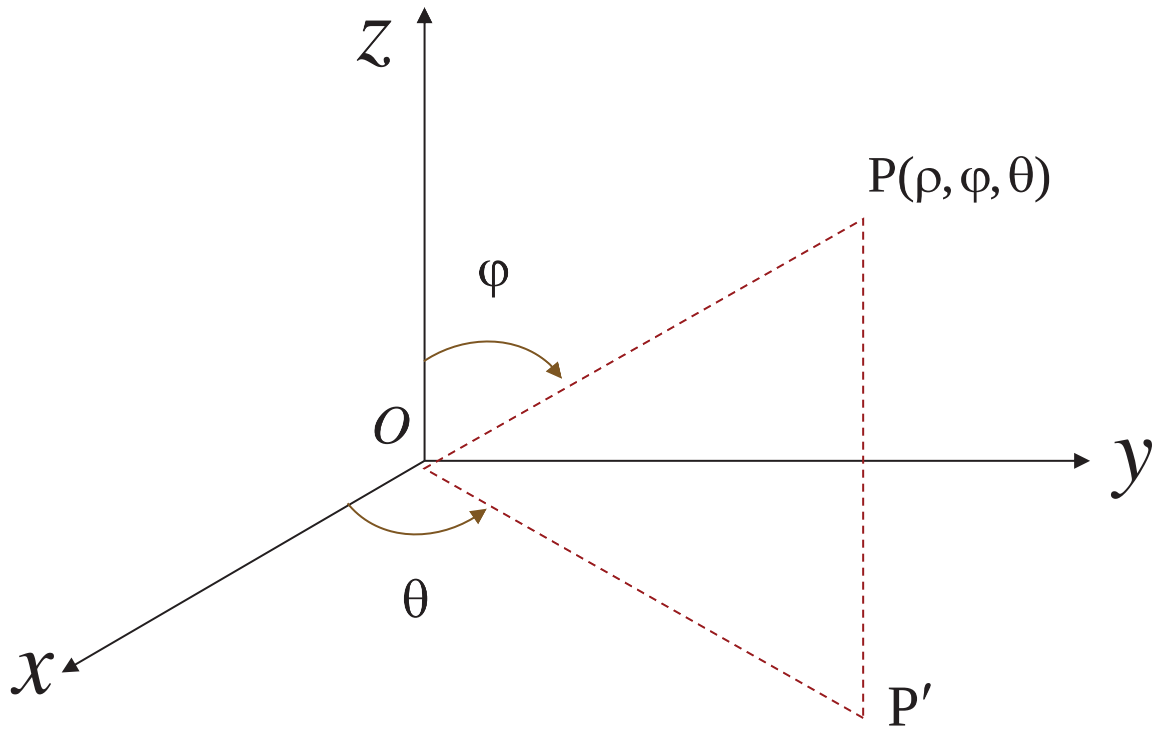
P بر صفحه xy و φ زاویه بین $\vec{oP}$ و $\vec{oz}$ است ، نمایش داده می شود . مـــبدا

مختصات را توسط هر سه تایی $(0, \varphi, \theta)$ نمایش می دهیم . معمولاً $\rho \geq 0$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ در نظر گرفته می شود. اصطلاح «کروی » به

این جهت اختیار داده شده است که در این دستگاه ،کره به مرکز o و شعاع k

توسط معادله ساده $\rho = k$ مشخص می شود.



به آسانی می توان دید که رابطه بین مختصات دکارتی (x,y,z)، مختصات

استوانه ای (r,θ,z) و مختصات کروی (ρ,φ,θ) توسط فرمول های

زیر داده می شود:

$$x = r\cos\theta = \rho\sin\varphi\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta = \rho\sin\varphi\sin\theta \qquad (*)$$
$$z = \rho\cos\varphi$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad , \quad \tan\varphi = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad , \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

به عنوان مثال ، اگر $(8, \pi/3, \pi/6)$ مختصات کروی یک نقطه باشد،

مختصات دکارتی آن عبارتند از:

$$x = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6$$

$$y = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}$$

و

$$z = 8\left(\frac{1}{2}\right) = 4$$

مثال:

معادله $\rho = 2\sin\varphi\cos\theta$ رادر مختصات دکارتی بنویسید .

حل:

دو طرف این معادله را در ρ ضرب می کنیم و فرمول های (❉) را به کار

می بریم در نتیجه، داریم

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2x \qquad \text{یا} \qquad (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$$

که معادله کره ای به شعاع ۱ و مرکز $(1,0,0)$ در مختصات دکارتی است .

مثال: شکل ایجاد شده توسط رابطه $\rho\theta - 4\theta\cos\varphi = \frac{\pi}{3}(\rho - 4\cos\varphi)$ را به طور تقریبی رسم کنید.

مثال: رویه $r+\frac{z}{r}=2\cos\theta$ را توصیف کنید.

حد و پیوستگی

تعریف

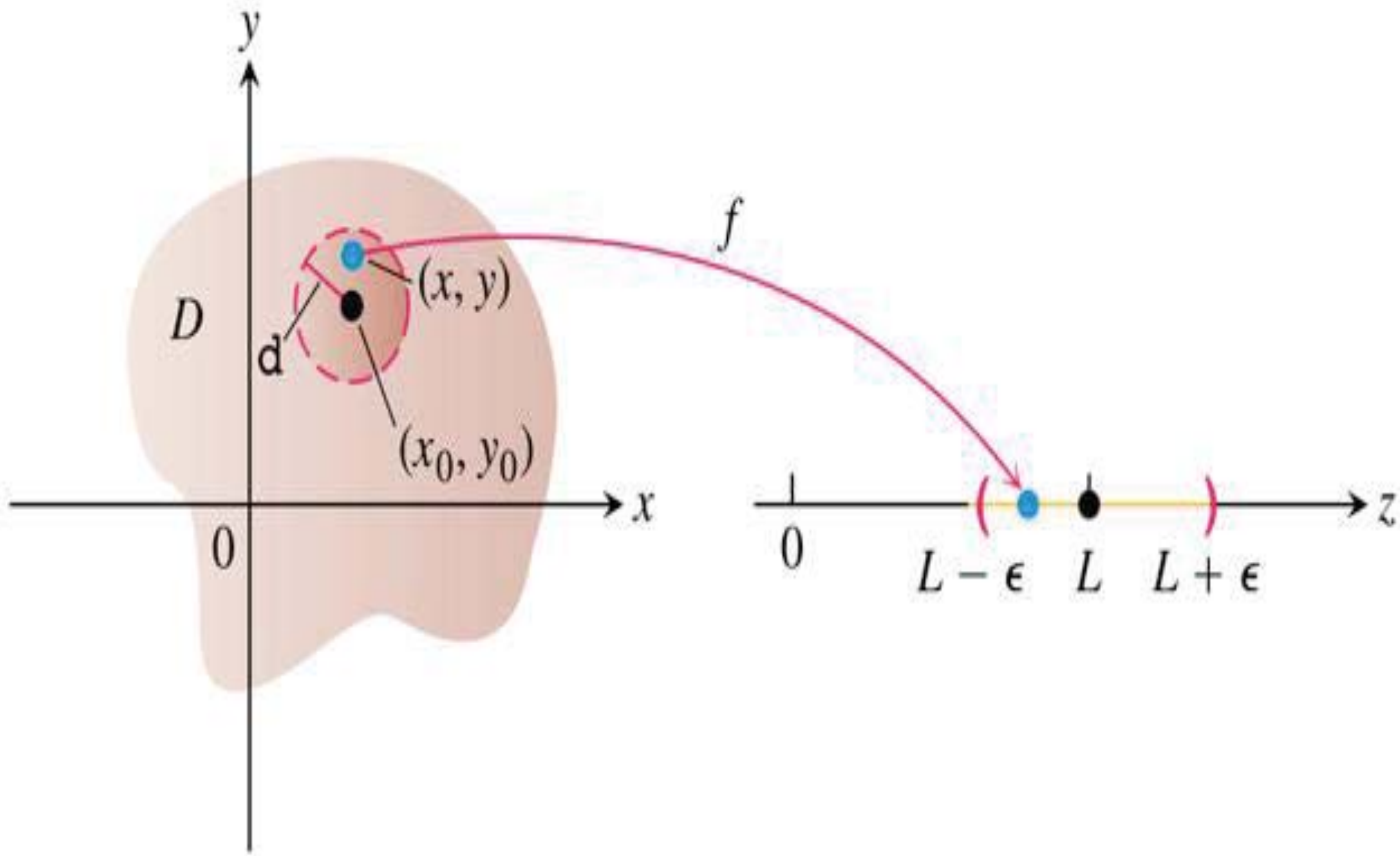
فرض کنیم تابع f در درون دایره ای به مرکز (a, b)، بجز احتمالا"در (a ,b)، معین است. در این صورت عدد L، را حد f در (a ,b) می گوییم اگر متناظر با هر $\varepsilon > 0$ یک $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که اگر

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$$

می توان نشان دادکه عدد L، در صورت وجود منحصر بفرد است ودر نتیجه آن را به صورت

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

نشان می دهیم.


y
f
(x, y)
D
d
(x0, y0)
x
0
0
z
L − ϵ
L
L + ϵ

مثال

فرض کنیم $f(x,y)=x$ و $g(x,y)=y$ ، نشان دهید که

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} y=b \qquad , \qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} x=a$$

حل:

فرض کنیم $\varepsilon>0$ چون

$$\sqrt{(x-a)^2}\le\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

پس اگر قرار دهیم $\varepsilon=\delta$ ، نتیجه می گیریم که اگر

$$0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$$

آنگاه

$$|f(x,y)-a|=|x-a|=\sqrt{(x-a)^2}<\delta=\varepsilon$$

این مطلب نشان می دهد که $\lim_{(x,y)\to(a,b)} x=a$.حکم دوم نیز به همین ترتیب اثبات می شود.

مثال

نشان دهید که: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} = 0$

حل:

فرض کنیم $\varepsilon > 0$ ،باید عددی چون $\delta > 0$ بیابیم به طوری که اگر

$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ آنگاه $\left| \dfrac{x^3}{x^2+y^2} \right| < \varepsilon$

چون $|x| = \sqrt{x^2} \le \sqrt{x^2+y^2}$ پس،

$$\left| \frac{x^3}{x^2+y^2} \right| < \frac{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2} \ .$$

باانتخاب $\delta = \varepsilon$ ،نتیجه می گیریم که اگر $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ ، آنگاه

$$\left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \varepsilon$$

باانتخاب $\delta = \varepsilon$ ،نتیجه می گیریم که:

اگر $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ ، آنگاه .

$$\left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} \right| \le \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \varepsilon$$

قضیه

فرض کنیم $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ وتابع یک متغیره g در L پیوسته باشد .دراین صورت

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g\big(f(x,y)\big) = g(L)$$

مثال:

$\lim_{(x,y)\to(e,1)} \ln \frac{x}{y}$ رابیابید.

حل:

فرض می کنیم $f(x,y)=\frac{x}{y}$ $\qquad g(t)=\ln t$

بنابراین داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(e,1)} f(x,y)=\frac{\lim_{(x,y)\to(e,1)} x}{\lim_{(x,y)\to(e,1)} y}=\frac{e}{1}=e\ .$$

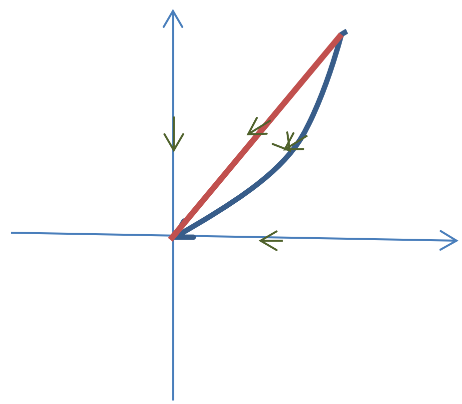
چون تابع g در e پیوسته است ،پس

$$\lim_{(x,y)\to(e,1)} \ln \frac{x}{y}=\lim_{(x,y)\to(e,1)} g\big(f(x,y)\big)=g(e)=\ln e=1$$

حال این سوال مطرح است که چگونه رفع ابهام کنیم؟

مثال:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy}{x^2+y^2} = \frac{0}{0}$$



اگر از روی مسیرهای مشخص و معین حد تابع موجود و برابر بود حد تابع را حدس زده و از تعریف حد آن را ثابت می کنیم.

در غیر این صورت تابع حد ندارد.

مسیرهای مشخص و معین در R^2 وقتی $(x,y) \to (0,0)$ عبارتند از:

1) مسیر $y=0$ (محور x ها)

2) مسیر $x=0$ (محور y ها)

3) مسیرهای $y=mx$ (خطوط گذرا از مبدا)

4) مسیرهای $y=nx^{\alpha}$ (منحنی های گذرا از مبدا)

حل مثال:

مثال:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} = \frac{0}{0}$$

حل:

مثال:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \frac{0}{0}$$

حل:

مثال:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2 y^3)}{2x^4 + y^6} = \frac{0}{0}$$

حل:

برخی روشهای دیگر رفع ابهام:

مثال: (1

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,-1,1)} \frac{x^3+y^3z^3}{x+yz}=\frac{0}{0}$$

(2

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{Sin(xy)}{x}=\frac{0}{0}$$

مسیرهای مشخص و معین در R^2 وقتی $(x,y)\to(a,b)$ عبارتند از:

1) مسیر $y=b$

2) مسیر $x=a$

3) مسیرهای $y-b=m(x-a)$

4) مسیرهای $y-b=n(x-a)^{\alpha}$

مثال:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(x-1)(y-2)^4}{(x-1)^4+(y-2)^8}=\frac{0}{0}$$

پیوستگی توابع چند متغیره

تعریف :

می گوییم تابع دومتغیره f در (a,b)پیوسته است اگر هرسه شرط زیر برقرار باشند:

الف) $f(a,b)$ وجودداشته باشد.

ب) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ وجود داشته باشد.

پ) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

❋توجه داشته باشید که اگر یکی از شرایط تعریف فوق برقرار نباشد ،آنگاه تابع

f در نقطه (a,b) پیوسته نیست.

مثال

نشان دهید که تابع f با تعریف $f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ در (-1,2) پیوسته است.

حل:

درستی سه شرط پیوستگی رانشان می دهیم.

الف) $$f(-1,2)=\frac{-1+8}{1+4}=\frac{7}{5}$$

ب) $$\lim_{(x,y)\to(-1,2)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(-1,2)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\frac{7}{5}$$

پ) $$\lim_{(x,y)\to(-1,2)} f(x,y)=\frac{7}{5}=f(-1,2)$$

بنابراین f در (-1,2) پیوسته است.

مثال: آیا تابع $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2-y^2}$ بر

$$D=\left\{(x,y):(x-1)^2+y^2<\frac{1}{2}\right\}$$

پیوسته است؟

مثال: آیا تابع

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

در $(0,0)$ پیوسته است؟

مثال: آیا تابع

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sin(yz)}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

در $(0,0,0)$

پیوسته است؟

مشتق جزئی

فرض کنیم f تابعی $n-$ متغیر ه باشد.اگر همه متغیر هابجز یکی ازآنها راثابت درنظر بگیریم،تابعی با یک متغیر به دست می آید. دراین بخش مشـــــتق این توابع یک متغیره رامورد بحث قرارمی دهیم.

تعریف

فرض کنیم f تابعی از دومتغیر xو y باشد. اگر

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

وجودداشته باشد. می گوییم که مشتق جزئی f نسبت به x (متغیر اول)وجود

دارد.مقداراین حد را مشتق جزئی f نسبت به x در نقطه (x,y)می نامیم وآن

را بانمادهای $f_x(x,y)$ یا $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ نمایش می دهیم.

✵ به همین نحو ،مشتق جزئی f نسبت به y در نقطه (x,y) برابراست با

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=f_y(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

به شرطی که این حد وجودداشته باشد.

مثال:

فرض کنید

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & ,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

مقادیر $f_x(0,b)$ و $f_y(a,0)$ را بیابید.

حل:

داریم $f_y(0,0)=f_x(0,0)=0$. فرض کنیم $a\neq 0$ و $b\neq 0$

درنتیجه ، بنابر فرمول های فوق داریم

$$f_x(0,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,b)-f(0,b)}{h}=$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^3 b - h b^3}{h^2 + b^2} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 b - b^3}{h^2 + b^2} = -\frac{b^3}{b^2} = -b$$

$$f_y(a,0) = \lim_{h \to b} \frac{f(a, 0 + h) - f(a,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{a^3 h - a h^3}{a^2 + h^2} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^3 - a h^3}{a^2 + h^2} = \frac{a^3}{a^2} = a$$

مثال: در توابع زیر $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $\frac{\partial f}{\partial z}$ را به دست آورید.

1) $f(x, y, z) = e^{x^2+yz}$

2) $f(x, y, z) = \arctan(\frac{xy}{z}) + \log_z^x$

توابع همگن و قضیه اویلر:

تابع سه متغیره$w = f(x, y, z)$ را تابع همگن از درجه α نامیم هرگاه به ازای هر مقدار ثابت و مثبت λ داشته باشیم:

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^{\alpha} f(x, y, z)$$

مطابق قضیه اویلر، اگر w تابعی همگن از درجه α باشد، داریم:

$$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + z\frac{\partial w}{\partial z} = \alpha w.$$

در حالت دو متغیره: $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\alpha} f(x, y)$ داریم:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \alpha z.$$

مثال: در تابع $z = \dfrac{\log x - \log y}{x^2 + y^2}$ ، اگر $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} + az = 0$ ، a را به دست آورید.

تعبیر هندسی

تعبیر هندسی مشتق های جزئی تابع دومتغیره $z = f(x, y)$ در (a, b) شبیه به

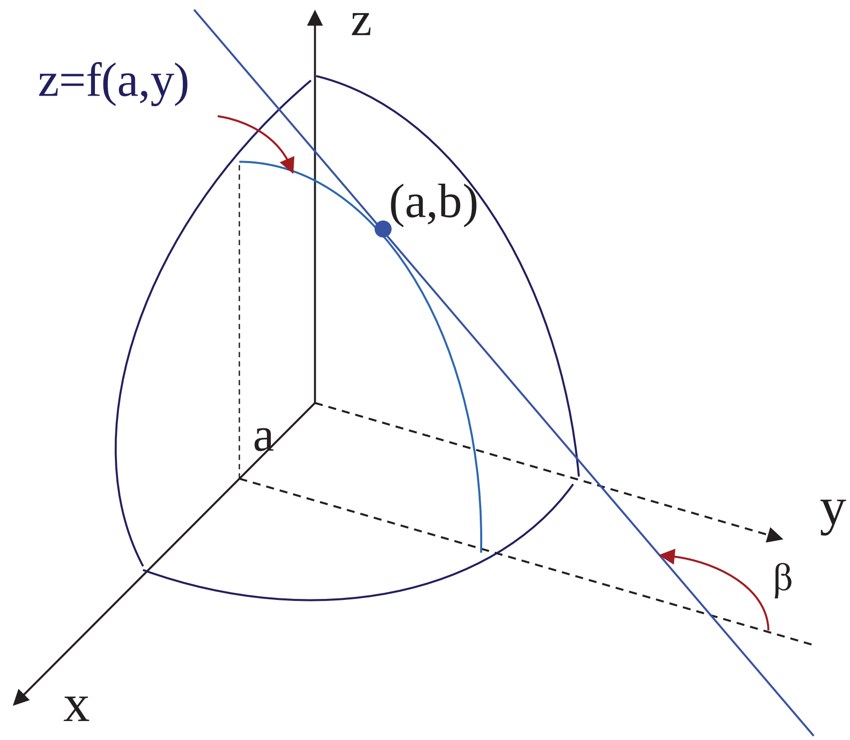
تعبیر هندسی مشتق توابع یک متغیر ه است. نمودار معادله $z = f(x, b)$ در

واقع اثر سطح $z = f(x, y)$ در صفحه $y = b$ است. بنابراین

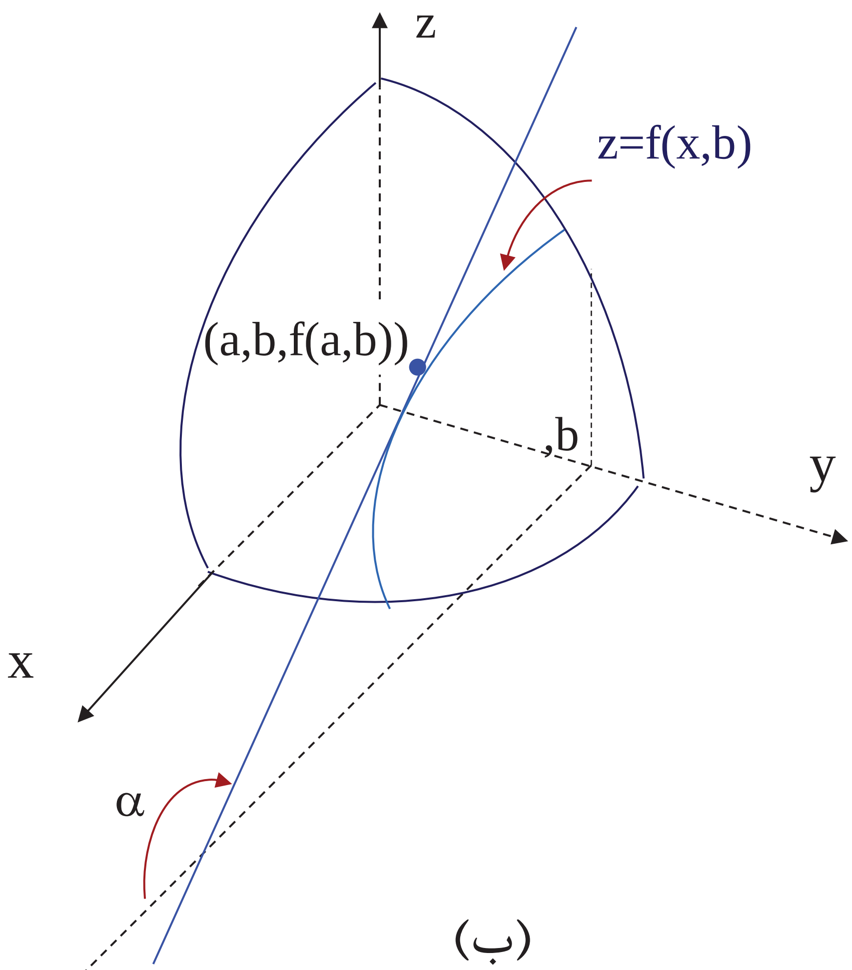
$$f_x(a,b) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)=(a,b)}$$

ضریب زاویه منحنی $z = f(x, b)$ در نقطه $(a, b, f(a, b))$ است.

(شکل (الف) و (ب) را ببینید.)



(الف)



(ب)

در نتیجه معادله خط مماس l براین منحنی در صفحه $y = b$ عبارت است از

$$z - f(a,b) = f_x(a,b)(x - a) .$$

به عبارت دیگر معادلات دکارتی (یا متقارن) این خط مماس عبارت اند از

$$y = b \quad , \qquad (x - a) = \frac{z - f(a,b)}{f_x(a,b)} .$$

به همین ترتیب ، با توجه به شکل (الف) معادلات دکارتی (یامتقارن) خط مماس

برمنحنی $z = f(a,y)$ (یعنی اثر سطح $z = f(x,y)$ در صـــفحه $x = a$) در نقطه

$(a, b, f(a,b))$ عبارتند از

$$x = a \quad , \qquad (y - b) = \frac{z - f(a,b)}{f_y(a,b)} .$$

مثال:

معادلات دکارتی خط مماس برمنحنی محل تقاطع سطح سهمیگون

$$z = f(x, y) = x^2 + 16y^2$$

و صفحه $y = 1$ در نقطه $(-3, 1, 25)$ را تعیین کنید.

حل:

چون

$$f_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + 16y\right) = 2x \ .$$

پس $f_x(-3,1) = -6$. بنابراین ، معادلات خط مماس مورد نظرعبارتند از:

$$y = 1 \quad , \qquad (x+3) = \frac{z-25}{-6}$$

آهنگ تغییر:

تعبیردیگر مشتق آهنگ تغییر است .به عبارت دیگر $f_x(a,b)$ آهنگ تغییر

$f(x,y)$ در (a,b)نسبت به x (وقتی y ثابت در نظر گرفته شود) است.

مثال

دمای یک صفحه فلزی در هر نقطه (x,y)برابراست با $T = 54 - \frac{2}{3}x^2 - 4y^2$

آهنـــــگ تغییردمای این صفحه فلزی رادر نقطه $(2,3)$ روی خط های $y=3$،

$x=2$، بیابید.

حل:

أهنگ تغییر T در (2,3)روی خط y =3 برابراست با

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{(2,3)} = -\frac{4}{3}x\Big|_{(2,3)} = -\frac{8}{3}$$

به همین ترتیب ،آهنگ تغییرT در (2,3) روی خط x =2 برابر است با

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{(2,3)} = -8y\big|_{(2,3)} = -24$$

مشتق های جزئی مرتبه های بالاتر

$$f_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad f_{yy}=\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$f_{xy}=\left(f_x\right)_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad f_{yx}=\left(f_y\right)_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

قضیه: هرگاه مشتقات جزئی f پیوسته باشند، آنگاه $f_{xy}=f_{yx}$.

مثال:

فرض کنیم $f(x,y)=\sin xy^2$. همه مشتق های جزئی دوم f راتعیین کنید.

مشتق های جزئی اول f عبارتند از:

$$f_y(x,y)=2xy\cos xy^2 \qquad , \qquad f_x(x,y)=y^2\cos xy^2$$

درنتیجه مشتق های جزئی دوم f برابرند با

دیفرانسیل کل

فرض کنیم f در (x,y)،مشتقپذیر باشد، یعنی

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$
$$+ \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

که درآن

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1 = 0 \quad , \quad \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_2 = 0 \quad .$$

درنتیجه:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

مقادیر $dx = \Delta x$ و $dy = \Delta y$ را به ترتیب ، د یفرانسیل x و yمی نامیم.

قضیه: اگر تابع دو متغیره f در (a,b) مشتق پذیر باشد، آنگاه f در (a,b) پیوسته بوده و دارای مشتقات جزئی f_x و f_y می باشد.

دراین صورت

$$df = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

رادیفرانسیل کل f می خوانیم . نمو f عبارت است از:

$$\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

دیفرانسیل کل توابع با بیش از دومتغیر نیز به صورت زیر تعریف می شود.

یعنی ، اگر تابعی با سه متغیر x ، y و z باشد ،آنگاه

$$df = f_x(x,y,z)dx + f_y(x,y,z)dy + f_z(x,y,z)dz$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

مثال: نمو Δf و دیفرانسیل df تابع سه متغیره $f(x,y,z)=2xy-3xz+yz$ در نقطه $(2,1,4)$ و به ازای $\Delta x=3$ ، $\Delta y=-1$ و $\Delta z=2$ به دست آورید.

قضیه: اگر تابع دو متغیره f در نقطه (a,b) دارای مشتقات جزئی پیوسته باشد، آنگاه f در (a,b) مشتق پذیر می باشد.

نکته: عکس قضیه فوق صادق نیست.

مثال: نشان دهید تابع

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & ,\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

در مبدا مشتق پذیر است ولی مشتقات جزئی اش در مبدا پیوسته نیستند.

صورت هاي قاعده زنجیره ای برای تابع با دومتغیر

الف) فرض کنیم $z = f(x,y)$، $x = g_1(t)$ و $y = g_2(t)$. دراین صورت $z = f\big(g_1(t), g_2(t)\big)$

و

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

ب) فرض کنیم $z = f(x,y)$، $x = g_1(u,v)$ و $y = g_2(u,v)$ در این صورت $z = f\big(g_1(u,v), g_2(u,v)\big)$ و

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

مثال:

فرض کنید $z = x\ln y$ ، $x = u^2 + v^2$ ، $y = u^2 - v^2$. عبارت های $\frac{\partial z}{\partial u}$

و $\frac{\partial z}{\partial v}$ را برحسب u و v بنویسید.

حل:

داریم

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$= (\ln y)(2u) + \left(\frac{x}{y}\right)(2u) = 2u\ln y + \frac{2xu}{y}$$

$$= 2u\ln(u^2 - v^2) + \frac{2u(u^2 + v^2)}{u^2 - v^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$= (\ln \mathrm{y})(2\mathrm{v}) + \left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}}\right)(-2\mathrm{v})$$

$$= 2v\ln(u^2 - v^2) - \frac{2v(u^2 + v^2)}{u^2 - v^2}$$

مثال: هرگاه $f(x+y-z, x+z-y, y+z-x)=0$ ، ثابت کنید:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}=D_1 f+D_2 f+D_3 f$$

مثال: هرگاه f و g توابعی دو بار مشتق پذیر باشند که

$$w = f(x - at) + g(x + at)$$

ثابت کنید:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

مشتق گیری ضمنی

اگر در معادله $F(x,y,z)=0$ ، z بر حسب x,y قابل محاسبه نباشد ، F مشتق پذیر باشد و $\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$ ، آنگاه مشتقات جزئی z بر حسب x,y عبارت است از:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

مثال:

هرگاه $x^3z^2+e^{xz}+\sin z^2=y^2-7$ ، مطلوب است $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$.

مثال: فرض کنید $F(x, y, z) = c$ ، F مشتق پذیر و مشتقات جزئی آن مخالف صفر باشند، نشان دهید

$$\frac{\partial x}{\partial z} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = -1$$

مشتق سوئی وگرادیان

تعریف

فرض کنیم $f : R^n \to R$ و $\vec{u} \in R^n$ یک بردار باشد.

مشتق سوئی f در نقطه a ودر جهت u را با $D_u f(a)$ نمایش می دهیم

و به صورت

$$D_u\ f\ (a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t}$$

تعریف می کنیم (مشروط براینکه این حد وجودداشته باشد.)

توجه می کنیم که اگر $\vec{u}=\vec{i}\in R^2$ آنگاه،

$$D_u f(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}=f_x(x,y)$$

واگر $\vec{u}=\vec{j}\in R^2$ ، آنگاه

$$D_u f(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}=f_y(x,y)$$

✵بنابراین مشتق های جزئی مرتبه اول f حالت های خاص مشتق سوئی (در جهت محورها) هستند.

مثال: مشتق سوئی تابع

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & ,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

را در مبدا در سوی بردار دلخواه $u(a,b)$ به دست آورید. آیا تابع f در مبدا پیوسته است؟

تعریف گرادیان :

فرض کنیم تابع اسکالر **n** متغیره **F** روی مجموعه

$A \subseteq Rn$ دارای تمام مشتقات جزئی مرتبه اول باشد در اینصورت :

$$\nabla f = gradf :$$

$$x \colon\to \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

$$, x \in A$$

مثال:

قضیه

اگر $f : R^n \to R$ در a مشتق‌پذیر و $\vec{u}$ برداری واحد باشد، آنگاه

$$D_u f(a) = \nabla f(a) \cdot u$$

مثال:

فرض کنید $f(x, y) = 6 - 3x^2 - y^2$ و $\vec{u} = (1/\sqrt{2})\vec{i} - (1/\sqrt{2})\vec{j}$. مقدار $D_u f(1,2)$ را بیابید.

حل:

توجه می کنیم که $\vec{u}$ یک بردار واحد است .

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y)\frac{1}{\sqrt{2}} + f_y(x,y)(-\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$= (-6x)\frac{1}{\sqrt{2}} + (-2y)(-\frac{1}{\sqrt{2}})$$

درنتیجه

$$D_u f(1,2) = (-6)\frac{1}{\sqrt{2}} + (-4)(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\sqrt{2}$$

در تعریف $D_u f(a)$ ، $\vec{u}$ برداری واحداست. مشتق سوئی f در جهت بردار

دلخواه و ناصفر $\vec{a}$ برابراست با$D_u f(x,y)$ ،که در آن

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \quad .$$

مثال:

فرض کنید $f(x,y,z)=xe^{y^2z}$ مشتق سوئی f در نقطه $(2,1,0)$ را در جهت

بردار $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+\sqrt{2}\,\vec{k}$ بیابید.

حل :

چون

$$|\vec{a}|=\sqrt{1+1+2}=\sqrt{4}=2$$

پس

$$\vec{u}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}\ .$$

مشتق های جزئی f عبارتند از

$$f_z(x,y,z)=xy^2e^{y^2z}$$

$$f_y(x,y,z)=2xyze^{y^2z}$$

$$f_x(x,y,z)=e^{y^2z}$$

بنا براین ،

$$D_u f(2,1,0)=f_x(2,1,0)\left(\frac{1}{2}\right)+f_y(2,1,0)\left(-\frac{1}{2}\right)+f_z(2,1,0)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

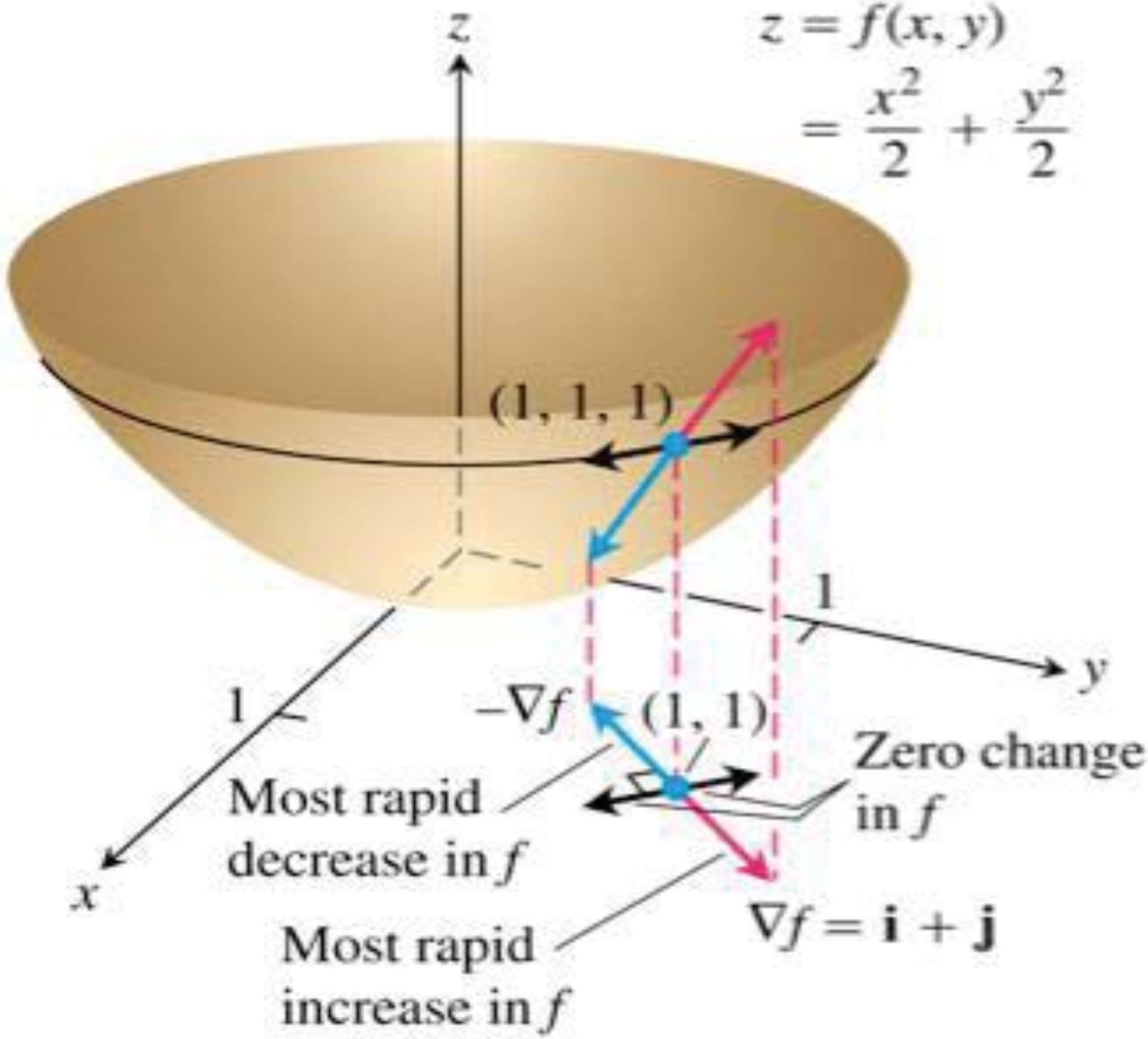
$$=1\left(\frac{1}{2}\right)+0\left(-\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{2}$$

توجه کنید هرگاه $f:R^n\to R$ مشتق پذیر نباشد از فرمول

$$D_u f(a)=\nabla f(a)\cdot u$$

نمی توانیم استفاده کنیم.

ویژگی های مشتق سوئی θ $D_u f = \nabla f \cdot u = |\nabla f| \cos$:


z
$z = f(x, y)$
$= \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$
(1, 1, 1)
1
y
1
x
$-\nabla f$
(1, 1)
Zero change in f
Most rapid decrease in f
$\nabla f = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
Most rapid increase in f

مثال: هرگاه مشتق تابع $f(x,y)$ در نقطه $p(1,2)$ در جهت $i+j$ برابر $2\sqrt{2}$ و در جهت $-2j$ برابر -3 باشد، مشتق f را در جهت $-i-2j$ بیابید.

صفحه مماس بر رویه :

فرض کنیم تابع f در نقطه $P(x_0, y_0, z_0)$ واقع برسطح S به معادله $F(x,y,z) = 0$

مشتقپذیر باشد . صفحه مماس بر S در نقطه P صفحه ای است که از P میگذرد

و $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ بردار نرمال آن است.

چون

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0, z_0)\vec{i} + f_y(x_0, y_0, z_0)\vec{j} + f_z(x_0, y_0, z_0)\vec{k}$$

و $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ در نقطه (x_0, y_0, z_0) بر صفحه مماس بر S نرمال است، پس معادله این صفحه عبارت است از

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

مثال:

معادله صفحه مماس بر کره $x^2+y^2+z^2=4$ رادر نقطه $\left(-1,1,\sqrt{2}\right)$ بنویسید

حل:

فرض می کنیم $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4$. چون

$$F_x(x,y,z)=2x \quad , \quad F_y(x,y,z)=2y \quad , \quad F_z(x,y,z)=2z$$

درنتیجه

$$F_x(-1,1,\sqrt{2})=-2 \quad , \quad F_y(-1,1,\sqrt{2})=2 \quad , \quad F_z(-1,1,\sqrt{2})=2\sqrt{2}$$

بنابراین معادله صفحه مماس براین کره در نقطه $\left(-1,1,\sqrt{2}\right)$ عبارت است از

$$-2(x+1)+2(y-1)+2\sqrt{2}(z-\sqrt{2})=0$$

یا

$$-x+y+\sqrt{2}z=4$$

ماکسیمم ومینیمم توابع دومتغیر ه

تعریف

فرض کنیم f تابعی از دومتغیر x و y ، و R زیرمجموعه ای از دامنه f باشد. در این صورت

الف) $f(x_0, y_0)$ مقدار **ماکسیمم (مطلق)** f در R است اگر به ازای هر (x,y)

در R $\quad f(x, y) \le f(x_0, y_0)$

ب) $f(x_0, y_0)$ مقدار **مینیمم (مطلق)** f در R است اگر به ازای هر (x,y)

در R $\quad f(x, y) \ge f(x_0, y_0)$.

پ) اگر R برابربا دامنه f باشد، آنگاه $f(x_0, y_0)$ مذکور در (الف) و(ب) را به ترتیب مقدار ماکسیمم و مقدار مینیمم f گوییم.

تعریف

فرض کنیم f تابعی از دو متغیر x و y باشد.در این صورت

الف) f در (x_0, y_0) دارای **ماکسیمم نسبی** است اگر دایره Cبه مرکز (x_0, y_0)

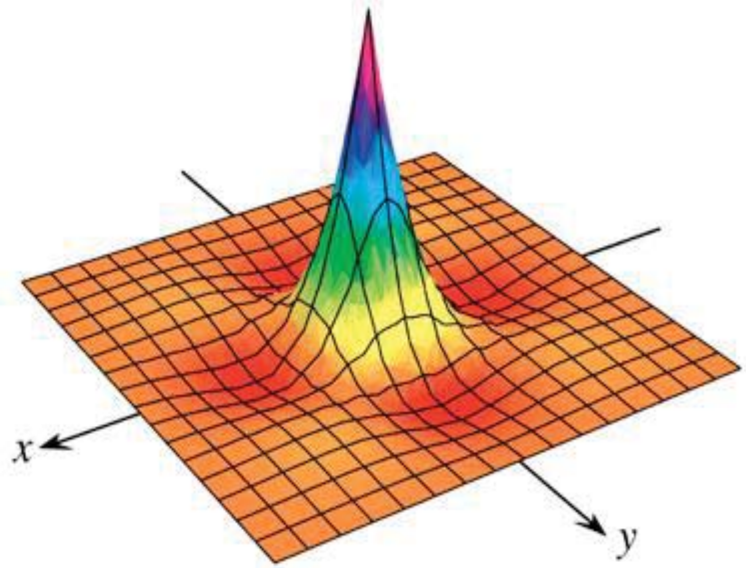
دردامنه f وجودداشته باشد به طوری که به ازای هر (x,y)در درون C،

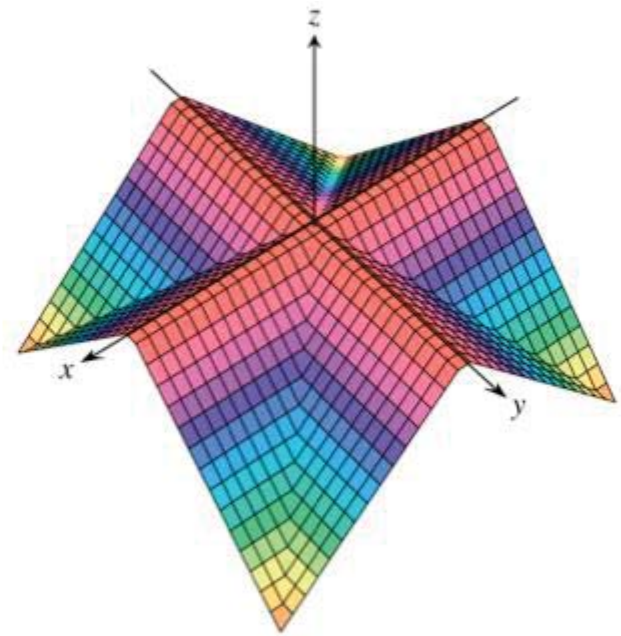
$$f(x, y) \le f(x_0, y_0)$$

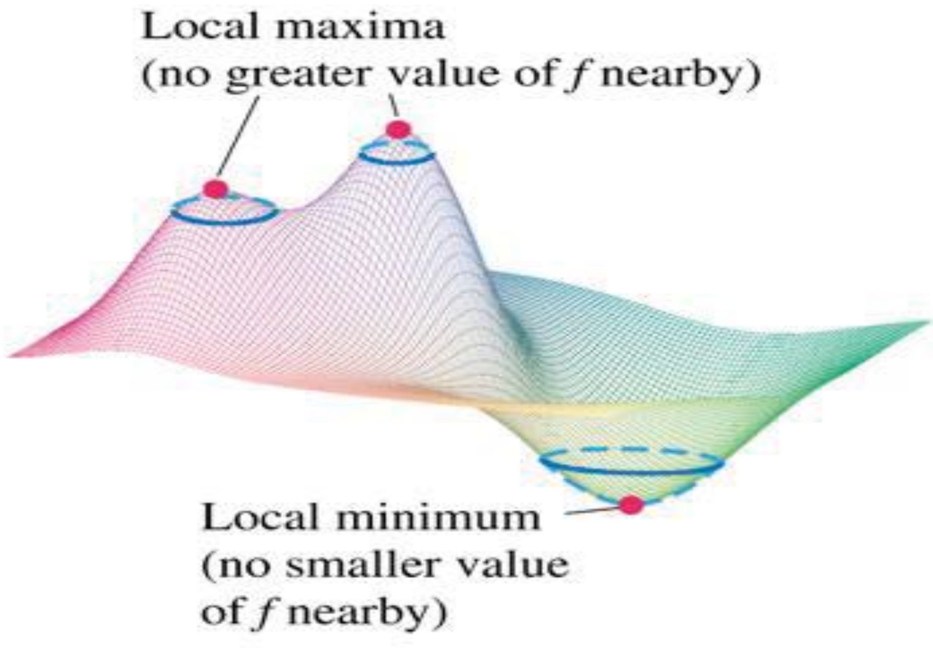
ب) f در (x_0, y_0)دارای **مینیمم نسبی** است اگر دایره C به مرکز (x_0, y_0)

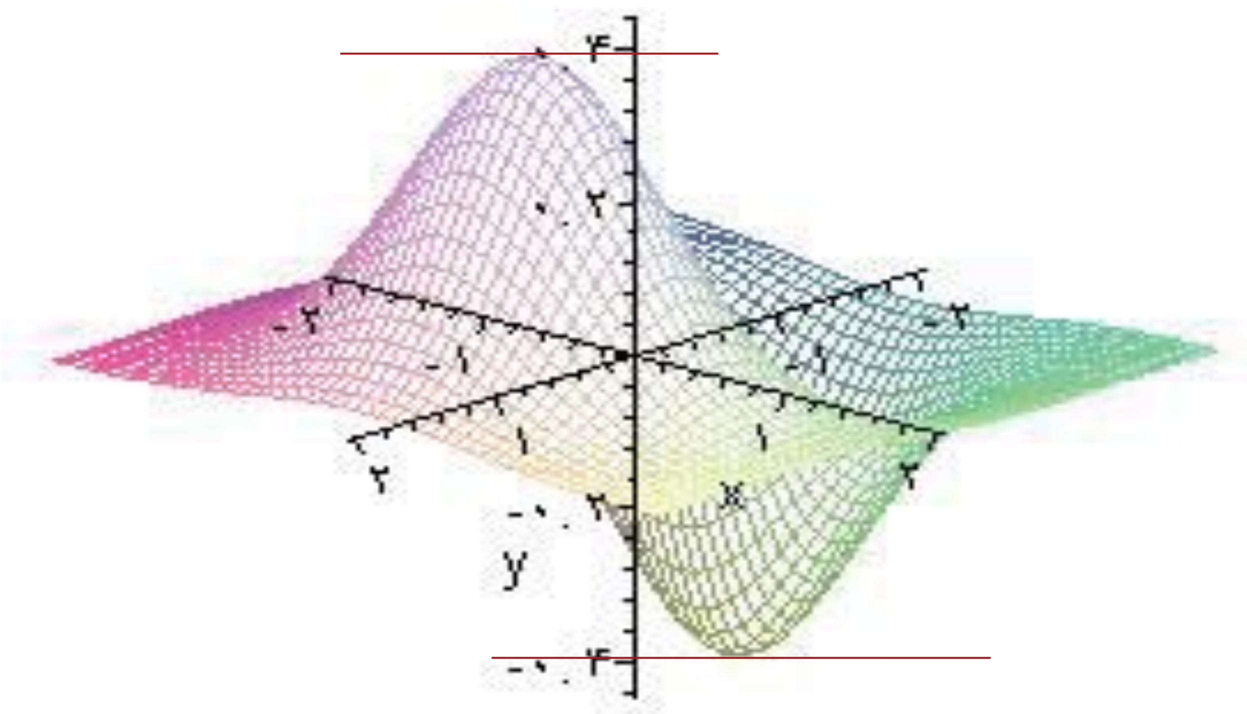
دردامنه f وجودداشته باشد به طوری که به ازای هر (x,y) در درون C،

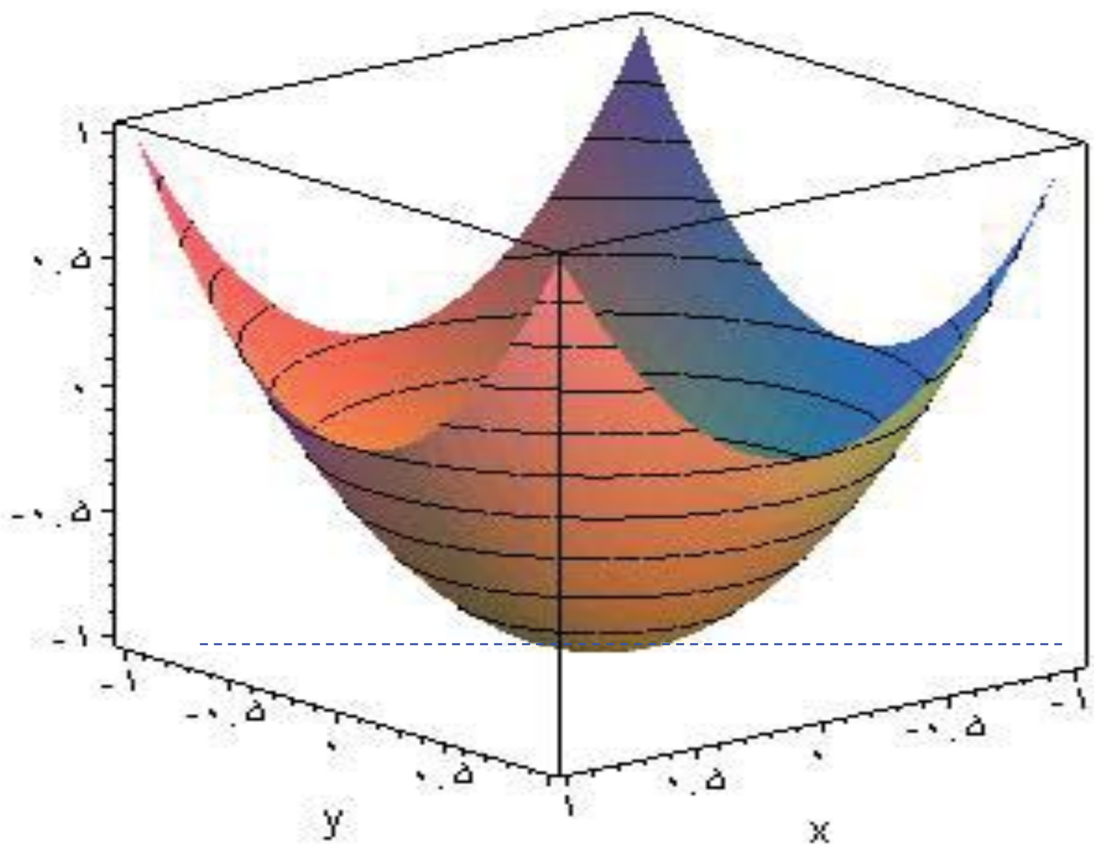
$$f(x, y) \ge f(x_0, y_0)$$


x
y


z
x
y


Local maxima
(no greater value of f nearby)
Local minimum
(no smaller value
of f nearby)


x
y


۱
۰.۵
۰
-۰.۵
-۱
-۱
-۰.۵
۰
۰.۵
۱
y
۱
۰.۵
۰
-۰.۵
-۱
x

✍قضیه زیرابرای ماکسیمم یا مینیمم نسبی توابع با دومتغیر داریم.

قضیه

فرض کنیم f در (x_0, y_0) ماکسیمم یا مینیمم نسبی دارد. اگر مشتق های جزئی f در (x_0, y_0) وجودداشته باشند ، آنگاه

$$f_y(x_0, y_0) = 0 \quad , \quad f_x(x_0, y_0) = 0$$

هرگاه ∇f در a موجود نباشد یا $\nabla f(a) = 0$ آنگاه a را یک نقطه بحرانی f نامیم.

مثال:

فرض کنید $f(x,y)=x^2+y^2$. مقدا ماکسیمم یا مینیمم f را (در صورت وجود) بیابید.

حل:

دستگاه

$$f_y(x,y)=2y=0$$
$$f_x(x,y)=2x=0$$

را حل می کنیم .تنها جواب این دستگاه (0, 0) است. لذا f(0, 0)=0 تنها مقدار ماکسیمم یا مینیمم نسبی احتمالی f است. چون

$$f(x,y)=x^2+y^2\geq f(0,0)=0$$

پس f در (0,0) دارای مینیمم نسبی f(0,0)=0 است.

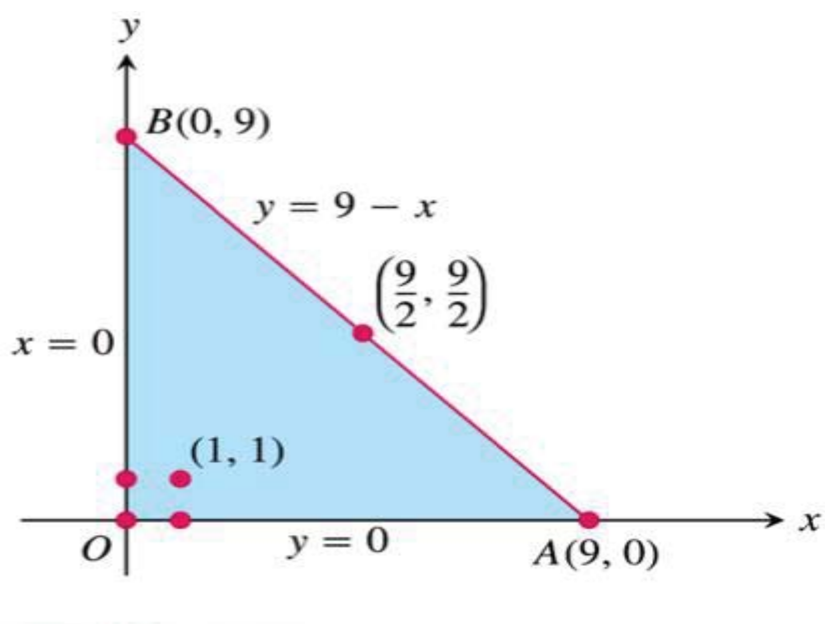
مثال : مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع

$$f(x,y)=2+2x+2y-x^2-y^2$$

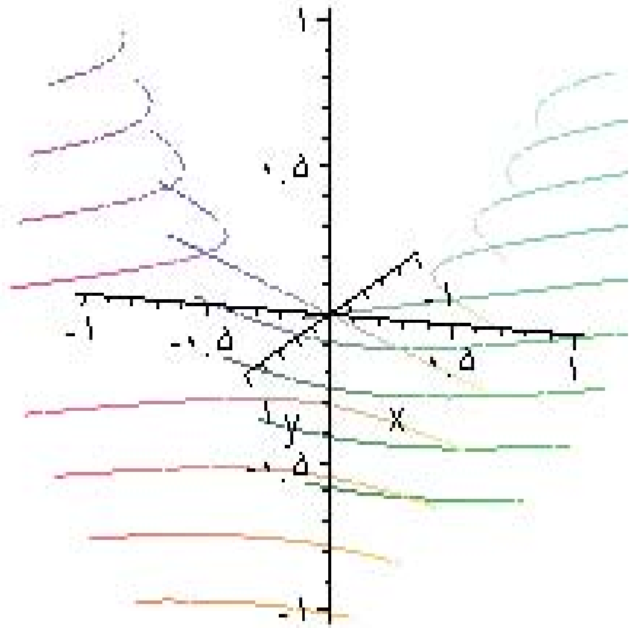
روی ناحیه مثلثی واقع در یک چهارم اول و محدود به خطوط

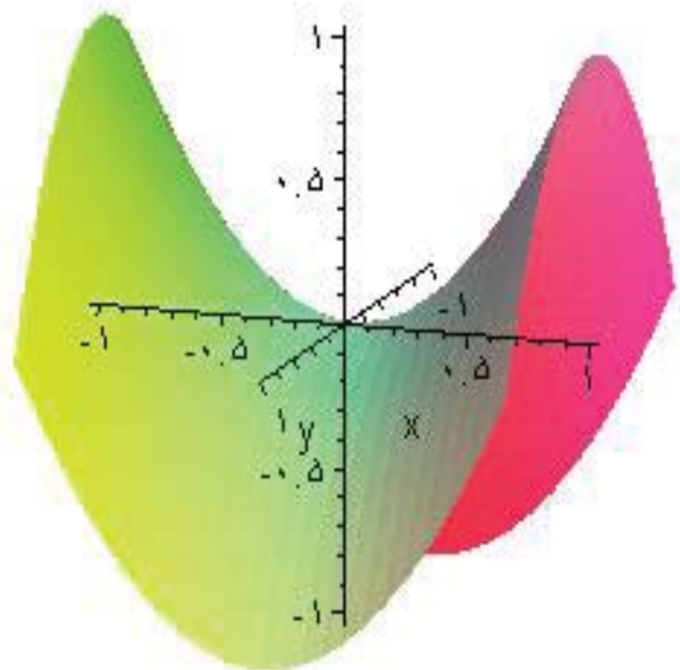
$$x=0, y=0, y=9-x$$

بیابید.

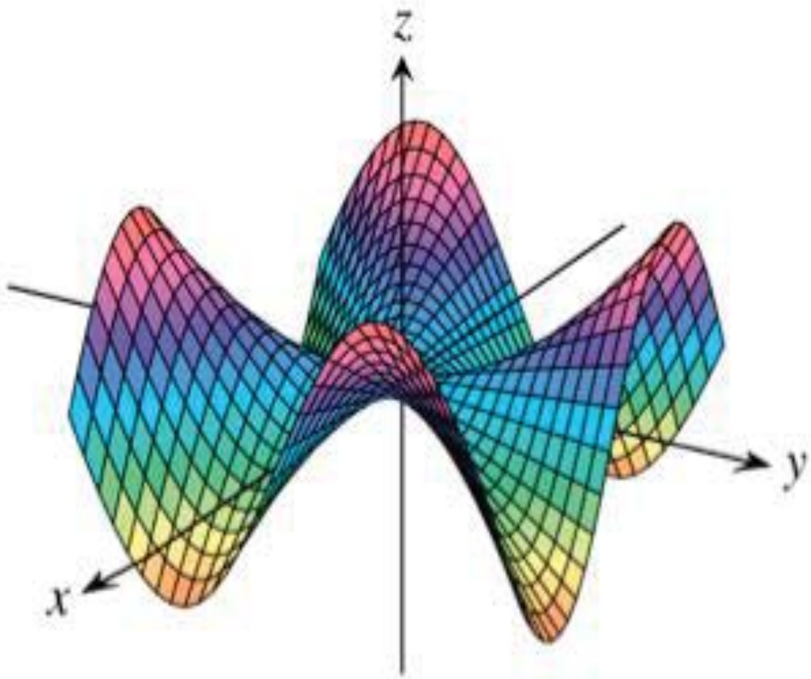


$$y^2 - x^2 = z$$

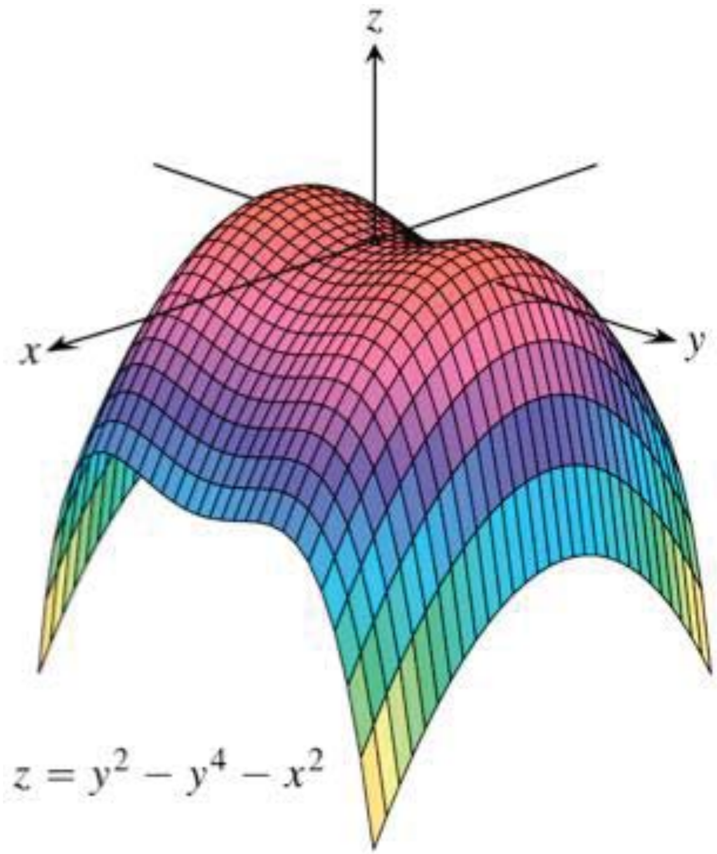




نقطه زین اسبی



$$z = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$



$$z = y^2 - y^4 - x^2$$

قضیه : (آزمون مشتق دوم)

$$f:A\to R \quad , \quad A\subseteq R^2$$

$x_0\in A$ مفروض و $N(x_0)$ همسایگی x_0

فرض می کنیم x_0 یک نقطه بحرانی f باشد در اینصورت :

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) \quad , \quad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0)$$

$$C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0) \quad , \quad D=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2$$

آنگاه :

الف : اگر $D<0$ نقطه x_0 نقطه زین اسبی است .

ب: اگر$D>0$ و $A>0$ نقطه x_0 مینیمم نسبی است .

ج: اگر $D>0$ و $A<0$ نقطه x_0 ماکزیمم نسبی است .

د: اگر $D=0$ نمی توان اظهار نظر کرد .

مثال :

نوع نقاط بحرانی تابع زیر را تعیین کنید .

$$f(x,y)=x^3+y^3-3xy+15$$

حل:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3y=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=3y^2-3x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \boldsymbol{x=0 \Rightarrow y=0} \\ \boldsymbol{x=1 \Rightarrow y=1} \end{matrix}$$

$$\boldsymbol{A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x \quad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=-3 \quad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y}$$

$$(0□0)□A=0 \qquad B=-3 \qquad C=0$$

$$D=\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}=-□<0 \Rightarrow$$ □زین اسبی

$$(1□1)□A=6>0 \qquad B=-3 \qquad C=6$$

$$D=AC-B^2=36-□>0 \Rightarrow$$ □مینیمم نسبی

مضرب لاگرانژ

روش مضرب لاگرانژ برای توابع با دومتغیر

می خواهیم ماکسیمم (یا مینیمم) تابع با دومتغیر f را با شرط $g(x,y)=0$ تعیین کنیم .با معرفی یک متغیر چون λ تابع جدیدی ، به نام تابع لاگرانژ به صورت

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$$

تعریف می کنیم. λ را مضرب لاگرانژ می نامیم. در این صورت ، اگر f در

ماکسیمم (یا مینیمم) داشته باشد، آنگاه $\lambda=\lambda_0$ وجود دارد به طوری که

(x_0,y_0,λ_0) یک جواب دستگاه سه معادله سه مجهولی

است. (توجه کنید که $F_\lambda = g(x,y)$.)

مثال:

فرض کنید $f(x,y)=x^2+4y^3$. ماکسیمم و مینیمم f را تحت شرط $x^2+2y^2-1=0$ تعیین کنید.

حل:

تابع لاگرانژ f را به صورت $F(x,y,\lambda)=x^2+4y^3+\lambda(x^2+2y^2-1)$

تعریف می کنیم. مشتق های جزئی مرتبه اول F عبارتند از

$$F_x(x,y,\lambda)=2x+2\lambda x \quad , \quad F_y(x,y,\lambda)=12y^2+4\lambda y$$

$$F_\lambda(x,y,\lambda)=x^2+2y^2-1$$

دستگاه سه معادله سه مجهولی

$$2x + 2\lambda x = 0$$

$$12y^2 + 4\lambda y = 0$$

$$x^2 + 2y^2 - 1 = 0$$

راحل می کنیم . معادله اول نتیجه می دهد که □□□□ یا $\lambda = -1$

اگر $x = 0$ آنگاه $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

اگر $\lambda = -1$ آنگاه $12y^2 - 4y = 0$ که نتیجه می دهد $y = 0$ یا $y = \frac{1}{3}$

$$y = 0 \Rightarrow x^2 + 2(0)^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$y = \frac{1}{3} \Rightarrow x^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{7}}{3} \quad .$$

بنابراین ، ماکسیمم (و مینیمم) f احتمالاً در نقاط

$$(0.\frac{\sqrt{2}}{2})\ ,(0,-\frac{\sqrt{2}}{2})\ ,\ (1,0)\ ,(-1,0)\ ,\ (\frac{\sqrt{7}}{3},\frac{1}{3})\quad \text{یا}\quad (-\frac{\sqrt{7}}{3},\frac{1}{3})$$

رخ می دهد .چون

$$f(1,0)=1=f(-1,0)\qquad ,\qquad f(0,-\frac{\sqrt{2}}{2})=-\sqrt{2}$$

$$f(0,\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}\qquad ,\qquad f\ (\frac{\sqrt{7}}{3},\frac{1}{3})=\frac{25}{27}\ =f(-\frac{\sqrt{7}}{3},\frac{1}{3})$$

پس ماکسیمم و مینیمم f به شرط $x^2+2y^2-1=0$ به ترتیب برابرند با

$$f(0,-\frac{\sqrt{2}}{2})=-\sqrt{2}\qquad ,\qquad f(0,\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}$$

تمرین: نشان دهید که ماکزیمم تابع $f(x, y, z) = x + y + z$
روی کره زیر عبارت است از $a\sqrt{3}$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

حل:

$$g : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

$$\nabla f = (1,1,1) \quad , \quad \nabla g = (2x, 2y, 2z)$$

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ 1 = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2\lambda} \\ y = \dfrac{1}{2\lambda} \\ z = \dfrac{1}{2\lambda} \\ (\dfrac{1}{2\lambda})^2 + (\dfrac{1}{2\lambda})^2 + (\dfrac{1}{2\lambda})^2 = a^2 \end{cases}$$

$$3(\frac{1}{2\lambda})^2 = a^2 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{3}}{2a} \Rightarrow x = y = z = \pm\frac{a}{\sqrt{3}}$$

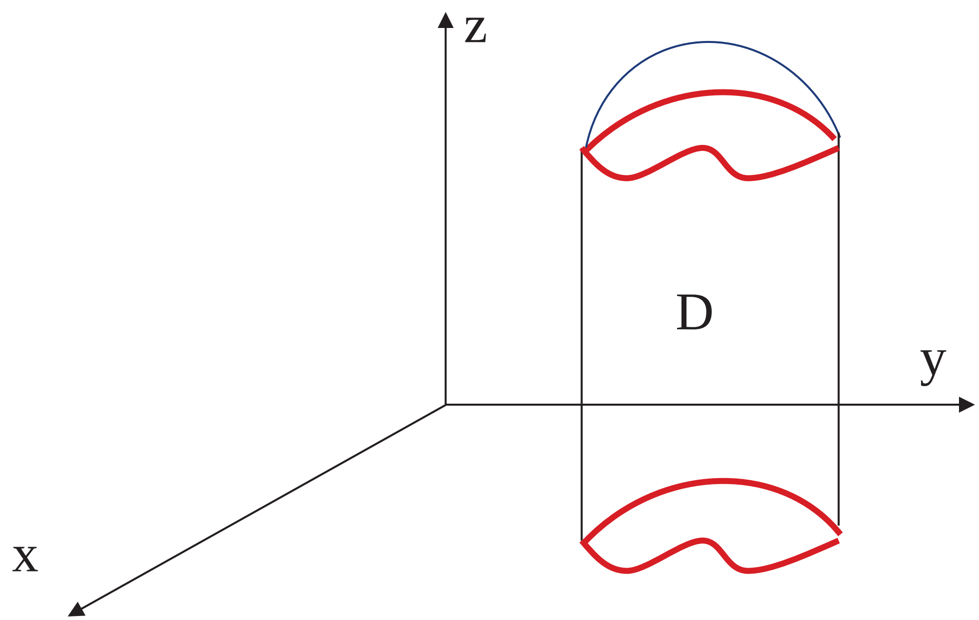
مثال: فرض کنید درجه حرارت روی و درون گوی فلزی توسط $T(x,y,z)=xy-z^2$ محاسبه شود. اگر گوی دارای معادله

$$\left\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\le 4\right\}$$

باشد، گرمترین و سردترین نقطه ی گوی را به دست آورید.

انتگرال دو گانه

فرض کنیم R ناحیه بسته ای در صفحه xy، و f تابعی پیوسته و نامنفی روی R باشد . فرض کنیم جسم D ازبالا به نمودار f واز پایین به R محدود باشد. در این D راناحیه زیر نمودار f وروی R می خوانیم . در اینجا می خواهیم حجم D را به دست آوریم.



ابتدا فرض می کنیم که R مستطیلی در صفحه xy، m و M به ترتیب مقادیر

مینیمم و ماکسیمم f در R ، باشند. پس ناحیه D، که زیر نمودار f و روی R

واقع است ، در مکعب مستطیل به قاعده R و ارتفاع m محیط ، و بر مکعــب

مستطیل به قاعده R وارتفاع M محاط ، است. دراین صورت ،اگر A مساحت

R و Vحجم Dباشد، آنگاه $mA \le V \le MA$.

حال ، بارسم خطوط موازی با محورها ،مستطیل R را به n زیر مستطیل

$R_1, R_2, \ldots, R_n$تقسیم می کنیم. فرض کنیم ، به ازای هر $1 \le i \le n$

m_i و M_i به ترتیب مقادیر مینیمم وماکسیمم f روی R_iو مساحت ΔA_i

باشد.دراین صورت ،داریم $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta A_i \le V \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta A_i$.

تعریف

حجم زیر سطح $z = f(x,y)$ و روی R برابر ا ست با

$$V = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i, \beta_i) \Delta A_i$$

قبل از بررسی حالت کلی ، متذکر می شویم که اگر طول و عرض R به ترتیب

به زیر بازه های

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{p-1}, x_p]$$

$$[y_0, y_1], [y_1, y_2], \ldots, [y_{q-1}, y_q]$$

تقسیم شود.

و، $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ و $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ و (α_i, β_i) نقطه ای در مستطیل

R_{ij} ، به طول $[x_i - x_{i-1}]$ و عرض $[y_i - y_{i-1}]$ قرار داشته باشد ،آنگاه

داریم

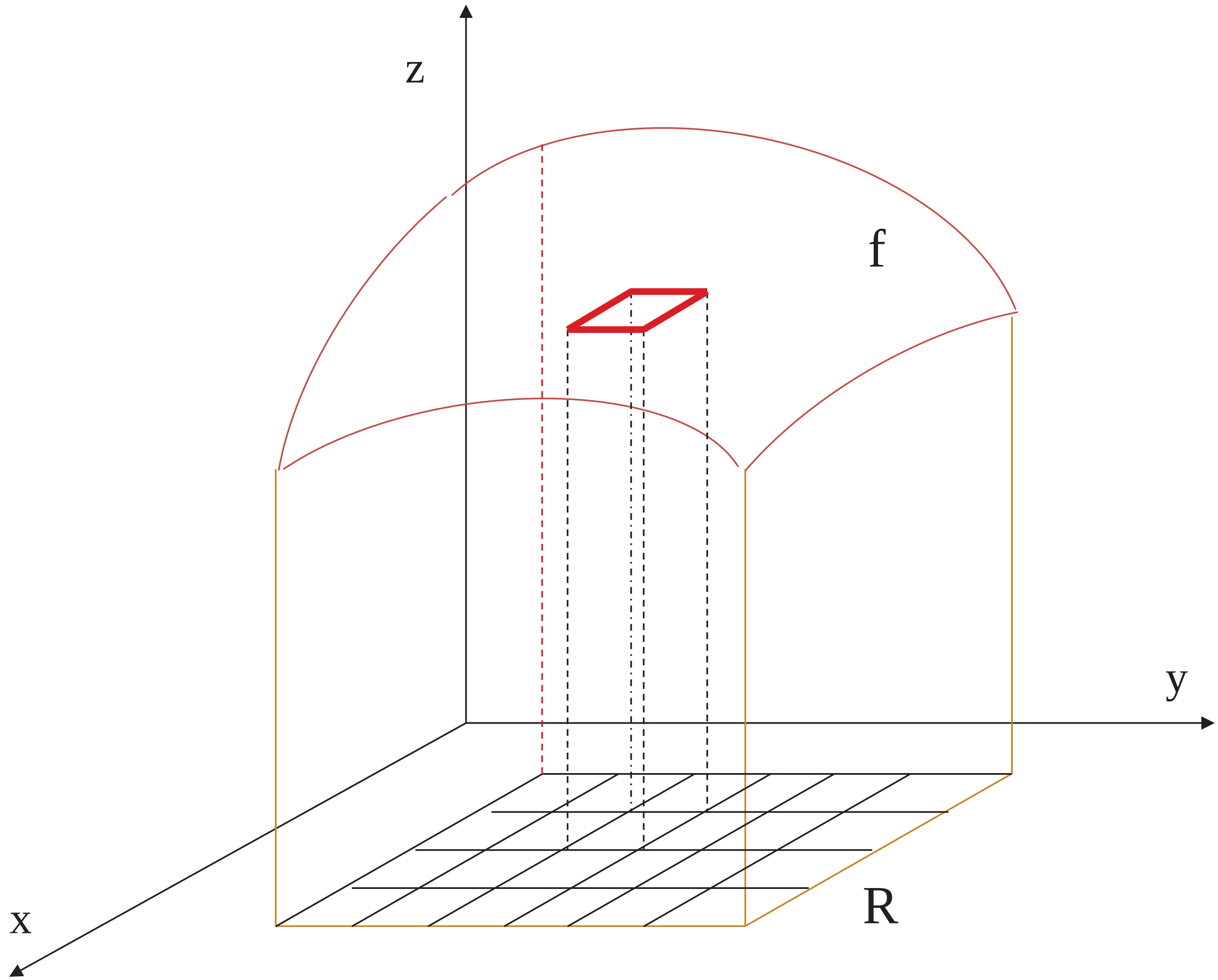
$$V = \lim_{d \to 0} \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=1}^{p} f(\alpha_i, \beta_i) \Delta x_i \Delta y_i$$

حال فرض کنید که R ناحیه ا ی بسته و دلخواه باشد . در این صورت R

می توان در درون یک مستطیل مانند R' قرار داد. فرض کنیم P یک افراز

مستطیل R' به زیر مستطیل ها باشد . اگر $R_1, R_2, \ldots, R_n$ زیر

مستطیل هایی باشند که کاملاً در درون R قرار دارند ، آنگاه می توان نشان داد که فرمول فوق برای حجم جسم Dنیز برقراراست .


z
f
y
x
R

محاسبه انتگرال دو گانه

مثال

فرض کنیم $f(x,y)=x^3+4y$ و $R=\{(x,y) \mid 1\le x\le 4,\quad -1\le y\le 2\}$

حجم زیر نمودار f و روی R را محاسبه کنید.

حل:

به ازای هر مقدار ثابت x، داریم

$$A(x)=\int_c^d f(x,y)dy=\int_{-1}^{2}(x^3+4y)dy$$

$$= x^3 y + 2y^2 \Big|_{y=-1}^{y=2}$$

$$= \left[x^3(2) + 2(2)^2\right] - \left[x^3(-1) + 2(-1)^2\right]$$

$$= 3x^3 + 6$$

در نتیجه ،حجم ناحیه مورد نظر برابر است با

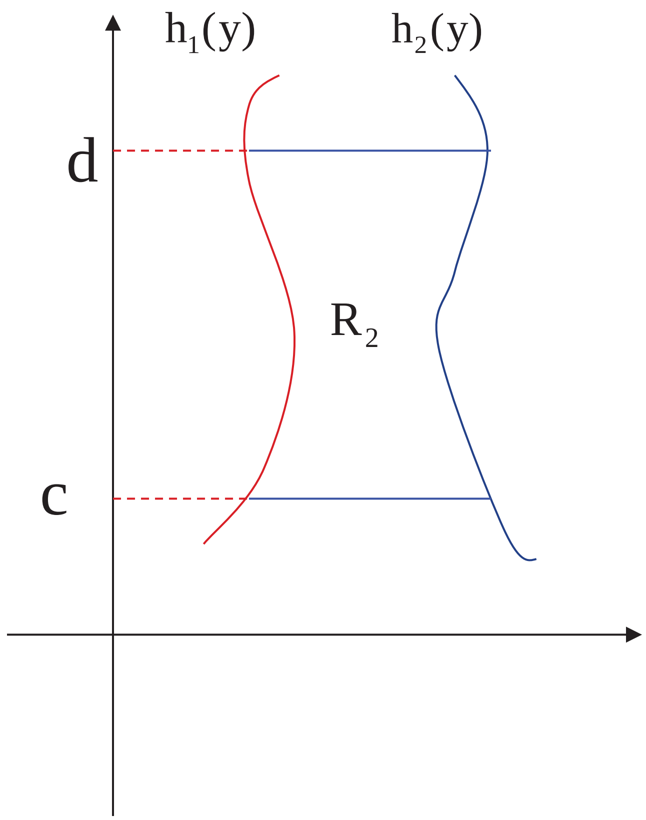
$$V = \int_c^d A(x)\,dx = \int_1^4 (3x^3 + 6)dx$$

$$= 3\frac{x^4}{4} + 6x \Big|_1^4$$

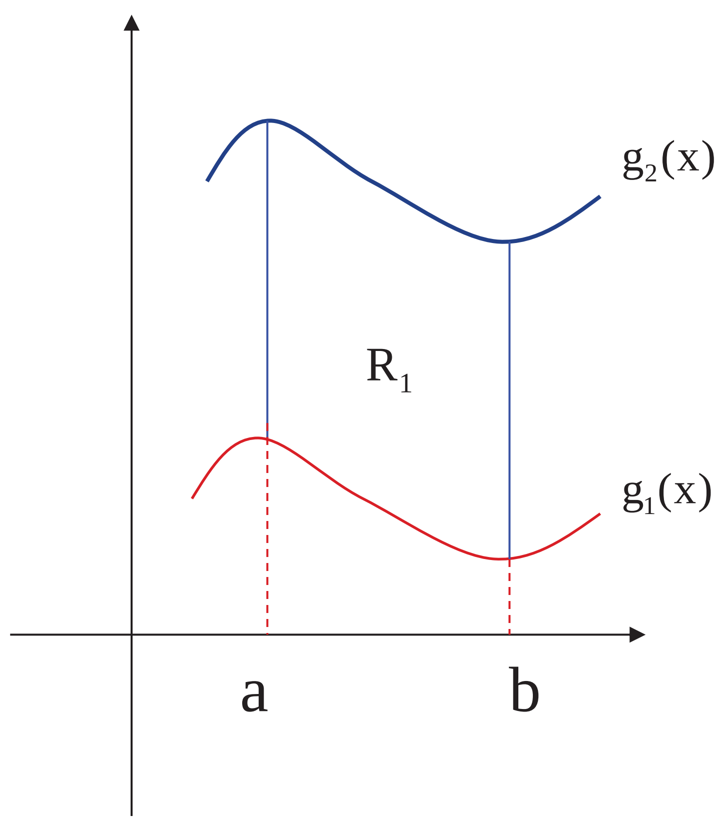
$$= 209\frac{1}{4}$$

مثال: مطلوب است محاسبه $\iint_D (x+y)^2\,dxdy$ که در آن $D=[0,1]\times[1,4]$.

محاسبه انتگرال دو گانه درحالت کلی



(ب)



(الف)

الف) اگر f روی R_1 پیوسته و نامنفی باشد، آنگاه

$$V=\iint_{R_1} f(x,y)\,dA=\int_a^b\left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right]dx\,.$$

ب) اگر f روی R_2 پیوسته و نامنفی باشد، آنگاه

$$V=\iint_{R_2} f(x,y)\,dA=\int_c^d\left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\right]dy\,.$$

مثال: مطلوب است محاسبه $\iint_D \sin(x+y)\,dxdy$ که در آن D ناحیه محصور بین خطوط $x=0$ ، $y=0$ و $x+y=\pi$ است.

مثال:

حجم جسم محدود به سطوح $x^2+y^2=9$ و $y^2+z^2=9$ را محاسبه کنید.

حل:

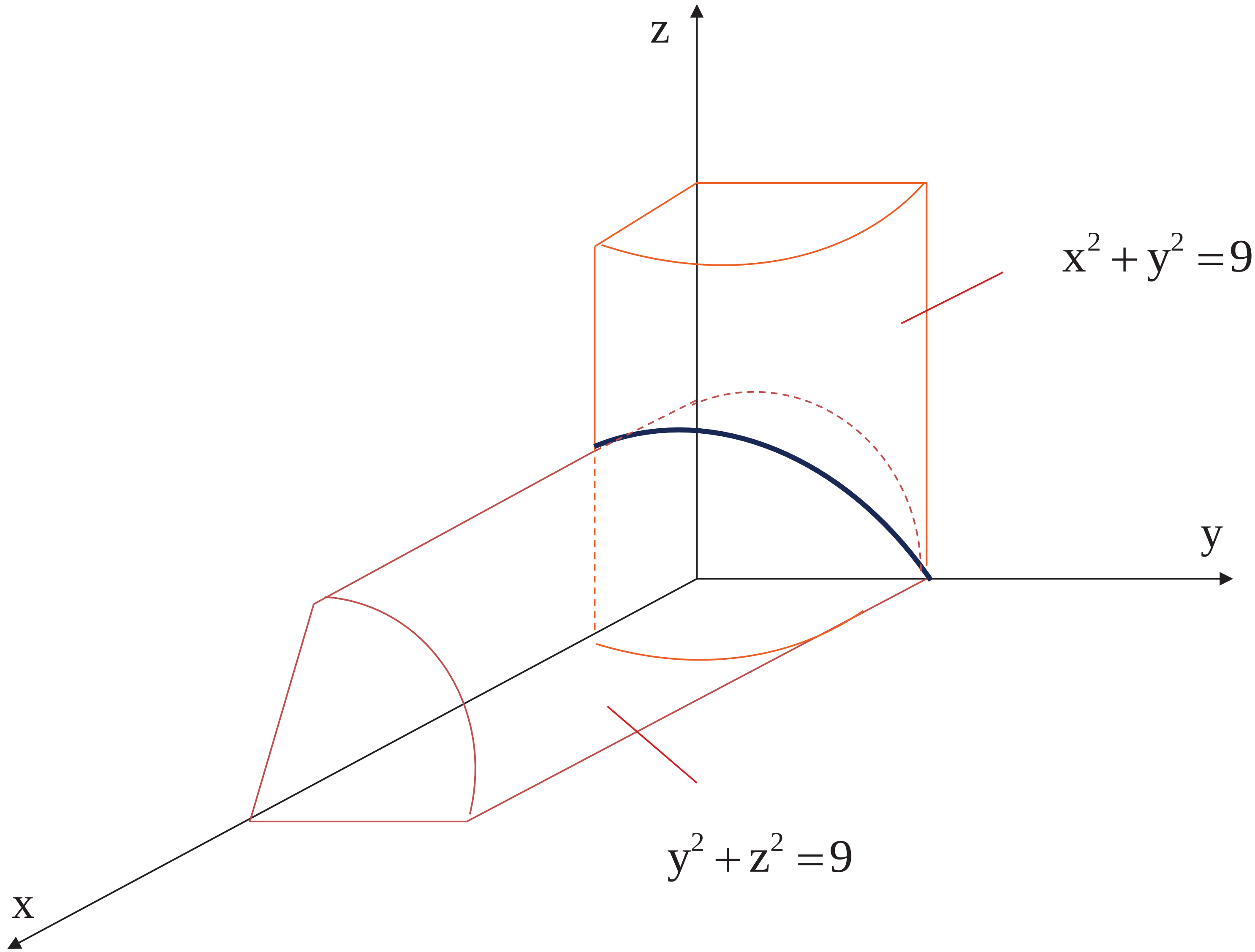
سطوح داده شده دو متغیر استوانه مدور

هستند .یک قسمت از هشت قسمت این دو متغیر استوانه در شکل زیر نـشان

داده شده است:

جسم مورد نظر از بالا به سطح $z=\sqrt{9-y^2}$ واز پایین به دایره $x^2+y^2=9$

محدود است . بنابراین ،حجم این جسم برابر است با


z
$x^2 + y^2 = 9$
y
$y^2 + z^2 = 9$
x

بنابراین ،حجم این جسم برابر است با

$$V = 8\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \sqrt{9-y^2}\,dxdy$$

$$= 8\int_0^3 x\sqrt{9-y^2}\ \Big|_0^{\sqrt{9-y^2}} dy$$

$$= 8\int_0^3 (9-y^2)dy = 8(9y-\frac{1}{3}y^3)\Big|_0^3 = 144\ .$$

✵ البته برای محاسبه این انتگرال دو گانه می توانیم ابتدا نسبت به y وسپس

نسبت به x انتگرال بگیریم . ولی ، روش دوم مشکل تر از روش بالاست .

تغییر ترتیب انتگرال گیری

ملاحظه کردیم که انتگرال دو گانه $\iint_R f(x,y)\,dA$ را می توان با استفاده از هریک از دو انتگرال مکرر

$$\int_a^b \int_{g_2(x)}^{g_1(x)} f(x,y)\,dy\,dx \qquad \text{یا} \qquad \int_c^d \int_{h_2(y)}^{h_1(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

محاسبه کرد.اینکه کدام انتگرال مکرر را به کار می بریم به تابع f، حدود انتگرال گیری وسلیقه ما بستگی دارد. گاهی محاسبه یکی از این دو انتگرال مکرر مشکل یا غیرممکن است . درحالی که انتگرال مکرر دوم را به آسانی می توان محاسبه کرد. تعویض یک انتگرال مکرر به دیگری را «تغییرترتیب انتگرال گیری» می گوییم زیرا یکی از dy dx و dx dy ، به دیگری تغییر می یابد.

مثال

انتگرال مکرر زیر را با تغییر ترتیب انتگرال گیری محاسبه کنید.

$$\int_0^9 \int_{\sqrt{y}}^3 \sin \pi x^3 dxdy$$

حل:

توجه می کنیم که محاسبه $\int \sin \pi x^3 dx$ آسان نیست. با توجه به حدود

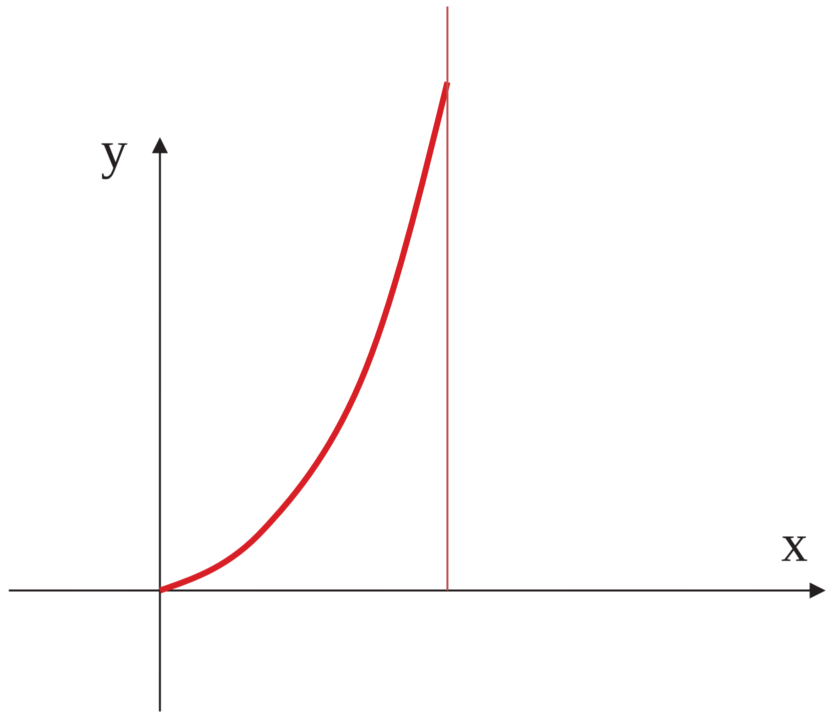
انتگرال مکرر فوق ،ناحیه R، که باید انتگرال دو گانه روی آن محاسبه شود ،

ناحیه محدود به نمودارهای

$$0 \le y \le 9 \quad , \quad x = \sqrt{y} \quad , \quad x = 3$$

است . روشن است که R را می توانیم ناحیه محدود به نمـــــودارهای $x=3$ ،

$y = x^2$ و محور x نیز در نظر بگیریم.



بنابراین داریم

$$\int_0^9 \int_{\sqrt{y}}^3 \sin \pi x^3 dxdy = \iint_R \sin \pi x^3 dA$$

$$= \int_0^3 \int_0^{x^2} \sin \pi x^3 dy\, dx$$

$$= \int_0^3 y \sin \pi x^3 \Big|_0^{x^2} dx$$

$$= \int_0^3 x^2 \sin \pi x^3 dx$$

$$= \frac{-1}{3\pi} \cos \pi x^3 \Big|_0^3 = \frac{2}{3\pi}$$

مثال:

انتگرال مکرر زیر را با تغییر ترتیب انتگرال گیری محاسبه کنید.

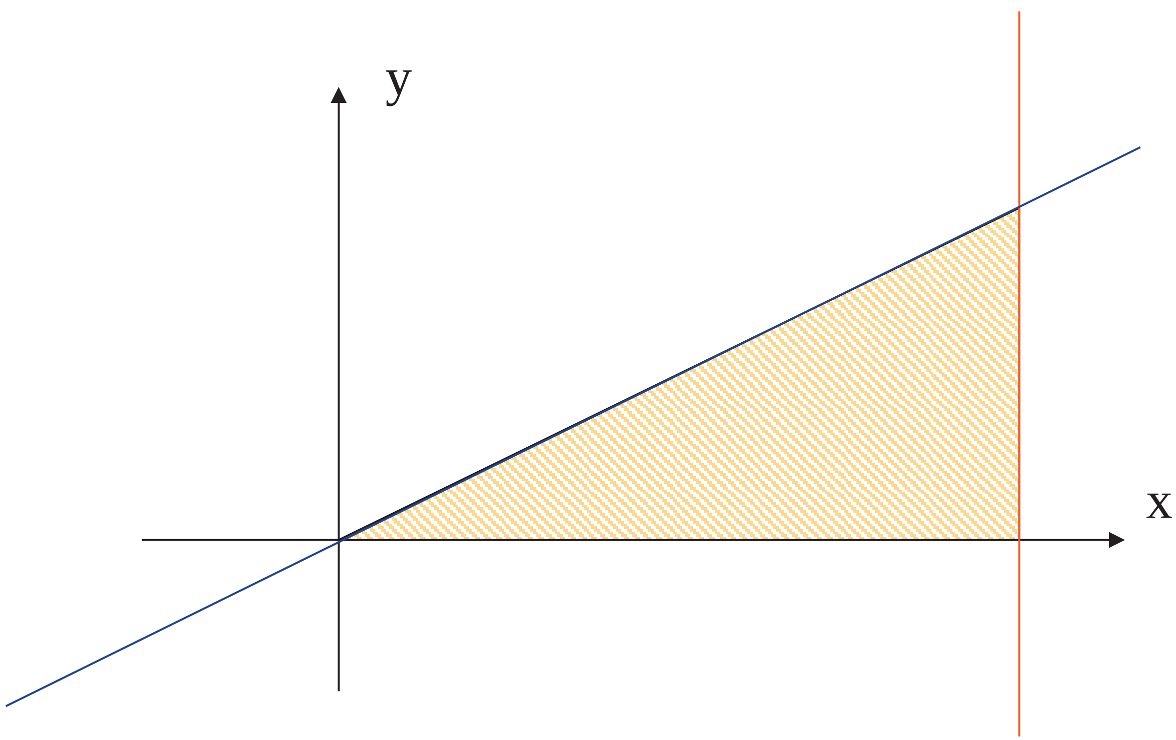
$$\int_0^1 \int_y^1 e^{(x^2)} dx dy$$

حل:

توجه کنید که محاسبه $\int e^{x^2} dx$ ساده نیست.باتوجه به حدود انتگرال گیری،

ناحیه R که انتگرال روی آن محاسبه می شود محدود به نمودارها ی $x = y$ ،

$x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ ا ست .



اگر R را به صورت

$$R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x\}$$

در نظر بگیریم ،داریم

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{(x^2)} dxdy = \int_0^1 \int_0^x e^{(x^2)} dy\, dx$$

$$= \int_0^1 e^{(x^2)} y \Big|_0^x dx$$

$$= \int_0^1 xe^{(x^2)} dx$$

$$= \frac{1}{2} e^{(x^2)} \Big|_0^1 = \frac{e}{2} - \frac{1}{2} \quad .$$

تذکر: با استفاده از تعریف انتگرال دوگانه، مساحت ناحیه $D \subset R^2$ را می توان به صورت زیر به دست آورد:

$$\iint_D dxdy$$

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرال دوگانه $\int\int_D ([x]+[y])dxdy$ که در آن D مثلثی با اضلاع $x=2, y=x, y=o$ می باشد.

مثال: مطلوب است محاسبه $\iint_D \left| y - x^3 \right| dxdy$ که در آن $D = [0,1] \times [0,1]$.

تعریف ژاکوبین :

فرض کنید $u = u(x, y)$ و $v = v(x, y)$ دو تابع دومتغیره پیوسته باشند به طوری که مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته داشته باشند، در این صورت

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}}$$

از ژاکوبین برای تغییر متغیر انتگرالهای چندگانه استفاده می شود. بدین ترتیب که اگر لازم شود در انتگرال $\iint_D f(x,y)dA$ متغیر با قرار دادن $y = y(u,v), \quad x = x(u,v)$ تغییر داده شود عبارت dA برحسب جملات u و v بدین صورت تغییر می کند :

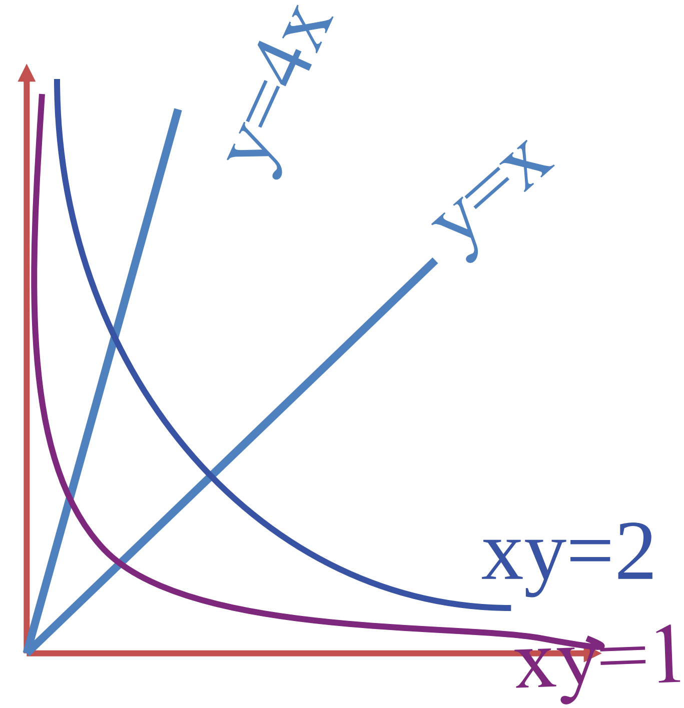
$$dA = |J| du dv$$

بنابراین بطور کلی داریم :

$$\int_R f(x, y)dA =$$
$$\iint_R f[x(u,v), y(u,v)] \mid J \mid dudv$$
$$= \iint_R F(u,v)dudv$$

مثال: انتگرال داده شده را روی ناحیه D محصور بین دو هذلولی xy=1 , xy=2 و خطوط y=x, y=4x واقع در ربع اول محاسبه کنید:

$$I = \iint_D x^2 y^2 dxdy$$



مثال: انتگرال داده شده را روی ناحیه D محصور بین x=0 , x+y=2
و خطوط y=0 را محاسبه کنید:

$$I = \iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dxdy$$

تغییر متغیر به مختصات قطبی :

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

$$\Rightarrow dxdy = rdrd\theta$$

مثال :

انتگرال دوگانه زیر که در دستگاه دکارتی است را به دستگاه قطبی تبدیل و سپس محاسبه می کنیم :

$$I=\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dydx$$

: تغییر متغیر به قطبی

$$\begin{cases} x = r\cos\theta & 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2} \\ y = r\sin\theta & o\le r\le a \end{cases}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\int_0^{a} \sqrt{a^2 - r^2}\; r\,dr}_{-\frac{\square}{\square}\left(a^2 - r^2\right)^{\frac{\square}{2}} \Big|_0^{a}} d\theta =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^{\square}}{\square} d\theta = \frac{a^{\square}\theta}{\square} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{a^{\square}\pi}{\square \cdot 2} = \frac{\pi}{\square} a^{\square}$$

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرال دوگانه $\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy$

مثال: مساحت یکی از گلبرگهای رز چهارپر $r = \cos 2\theta$ را بیابید.

مثال:

فرض کنید R ناحیه بیرون نمودار r=a و درون نمودار $r = 2a\sin\theta$ باشد، که در

آن a عددی ثابت است . انتگرال دو گانه زیر را محاسبه کنید.

$$\iint_R \frac{1}{r}\,dxdy$$

حل:

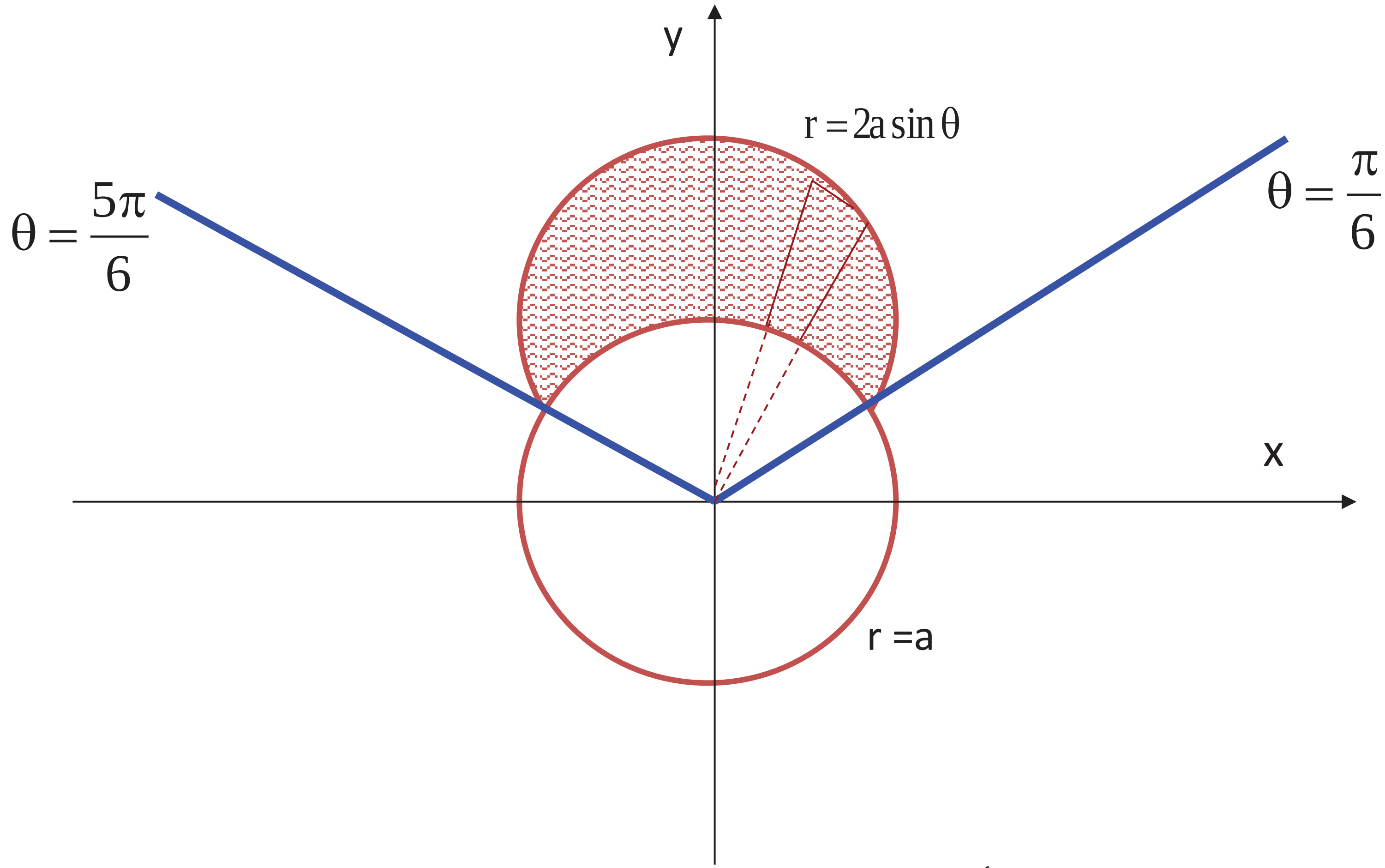
برای تعیین محل تلاقی دو نمودار r =a و $r = 2a\sin\theta$، دستگاه

$$\begin{aligned} r &= a \\ r &= 2a\sin\theta \end{aligned}$$

راحل می کنیم.

پس $\theta = \frac{\pi}{6}$ یا $\theta = \frac{5\pi}{6}$. پس این دو نمودار در نقاط $(a, \frac{\pi}{6})$ و $(a, \frac{5\pi}{6})$ یکدیگر

را قطع می کنند.



بنابراین، با توجه به $f(r,\theta) = \frac{1}{r}$ داریم:

$$\iint_R f(r,\theta)dA = \int_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\theta=\frac{5\pi}{6}} \int_{r=a}^{r=2a\sin\theta} \left(\frac{1}{r}\right) r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_{a}^{2a\sin\theta} 1 dr d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} r\Big|_{a}^{2a\sin\theta} d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (2a\sin\theta - a) d\theta$$

$$= (-2a\cos\theta - a\theta)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}$$

$$= -2a\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) - a\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \left[-2a\frac{\sqrt{3}}{2} - a\frac{\pi}{6}\right]$$

$$= 2\sqrt{3}a - \frac{2\pi}{3}a \quad .$$

مثال:

مساحت ناحیه محدود به دایره های r =1 , r =3، خط $\theta = 0$ و مارپیچ $r\theta = 1$ را محاسبه کنید.

حل:

$$A = \int_1^3 \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{1}{r}} r\, d\theta\, dr = \int_1^3 r\theta \Big|_0^{\frac{1}{r}} dr = \int_1^3 r\left(\frac{1}{r}\right) dr = 2\ .$$

مساحت رویه

فرض کنیم به ازای هر (x,y) در ناحیه R ، $f(x,y) \geq 0$ و مشتق های جزئی f

پیوسته باشند در زیر فرمول محاسبه مساحت رویه $z = f(x,y)$ که روی R واقع

است را می آوریم.

فرمول مساحت رویه

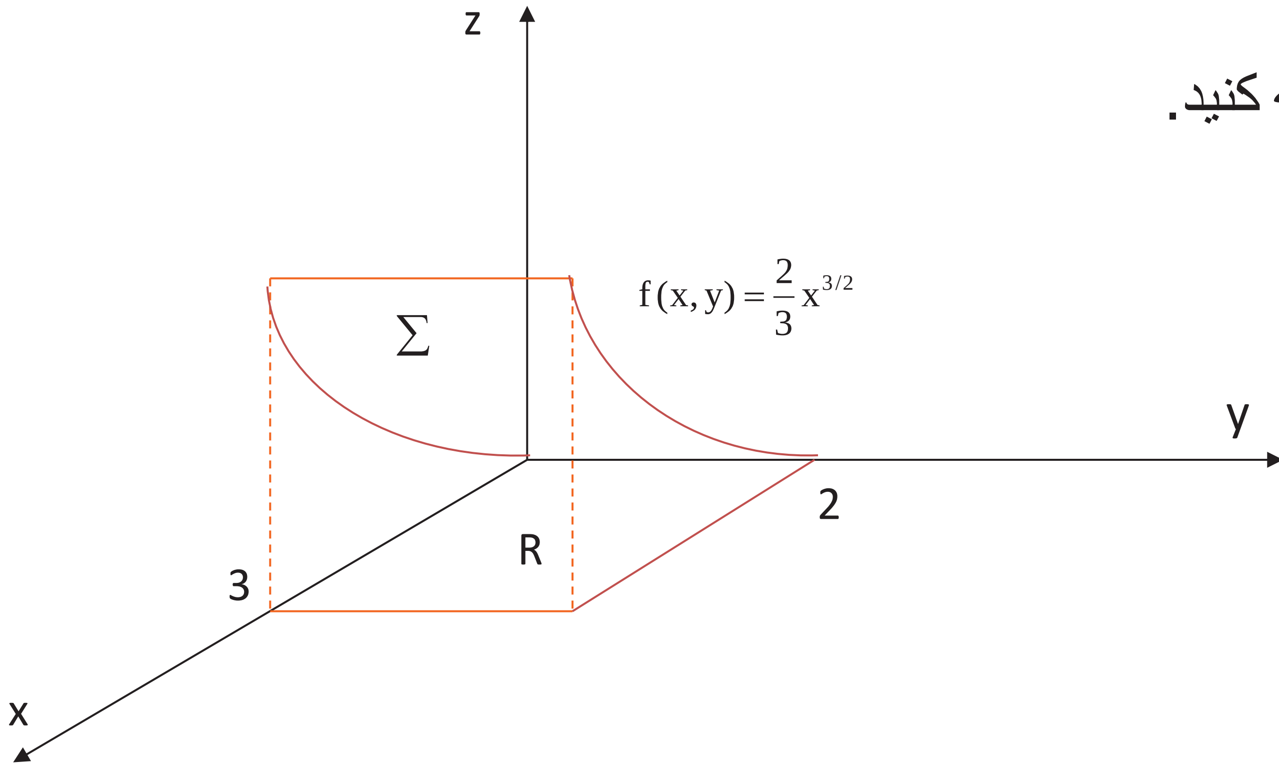
فرض کنیم S مساحت قسمتی از رویه $z = f(x,y)$ است که روی ناحیه محدود

و بسته R واقع است . اگر f_x و f_y در R پیوسته باشند، آنگاه

$$S = \iint_R \sqrt{1 + [f_x(x,y)]^2 + [f_y(x,y)]^2}\ dA\ .$$

مثال:

فرض کنیم R مستطیل محدود به خطوط $x=0$, $x=3$, $y=0$, $y=2$ باشد و $f(x,y)=\frac{2}{3}x^{3/2}$. مساحت قسمتی از نمودار f را که روی R واقع است محاسبه کنید.



حل:

مشتق های جزئی f به ازای (x ,y) در R عبارتند از

$$f_x(x,y) = x^{1/2} \quad , \quad f_y(x,y) = 0$$

ملاحظه می کنیم که این مشتق ها روی R پیوسته اند. بنابراین مساحت رویه موردنظر برابر است با

$$S = \iint_R \sqrt{(x^{1/2})^2 + 0 + 1}\ \ dA$$

$$= \int_0^3 \int_0^2 \sqrt{x+1}\,dy\,dx = \int_0^3 \sqrt{x+1}\,y\Big|_0^2 dx$$

$$= \int_0^3 2\sqrt{x+1}\,dx = \frac{4}{3}(x+1)^{3/2}\Big|_0^3 = \frac{28}{3}$$

مثال:

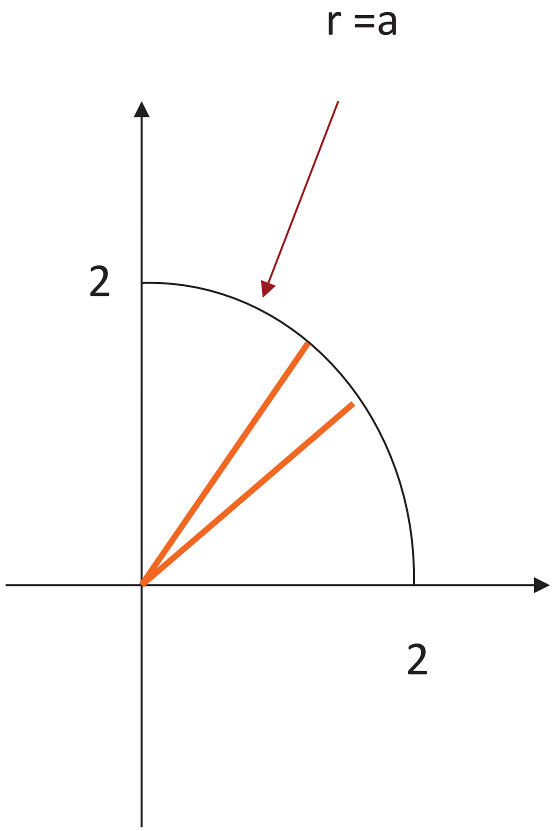
مساحت قسمتی از نمودار $f(x,y)=4-x^2-y^2$ را که روی صفحه xy واقع است محاسبه کنید.

حل:

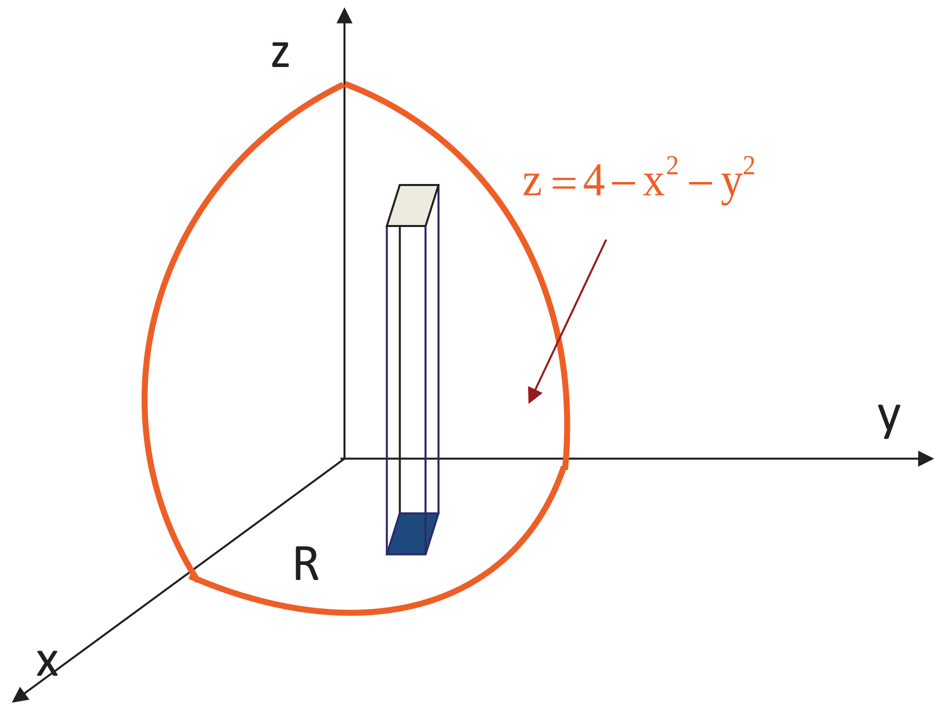
ربع این رویه در زیر رسم شده است .

$$f_y(x,y)=-2y$$

$$f_x(x,y)=-2x$$



r =a
2
2



z
$z = 4 - x^2 - y^2$
y
R
x

پس ، مساحت رویه مورد نظر برابر است با

$$S=\iint_R \sqrt{1+4x^2+4y^2}\ \ dA$$

که درآن R ناحیه محدود به دایره $x^2+y^2=4$ است . محاسبه این انتگرال

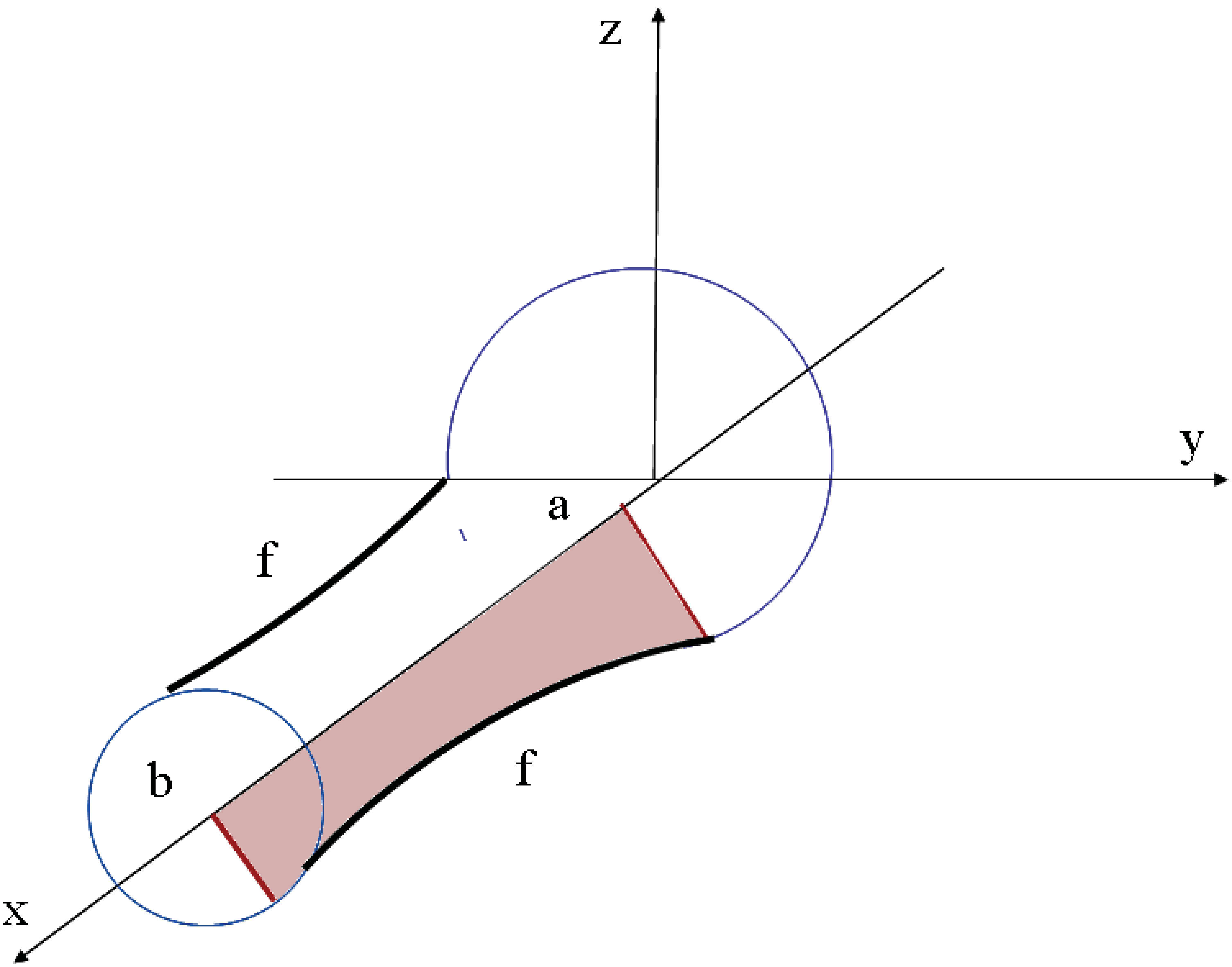
در مختصات قطبی آسانتر است .داریم.

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{1+4r^2}\,r dr d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{12}(1+4r^2)^{3/2}\Big|_0^2 d\theta$$

$$=\frac{1}{12}\int_0^{2\pi}(17^{3/2}-1)d\theta=\frac{1}{6}\pi(17^{3/2}-1)\quad .$$

مساحت رویه دوار

اگر خم مسطحه Cحول خطی واقع در صفحه ای که Cدر آن واقع است دوران کند ، یک رویه دوار تولید می شود. به عنوان مثال ،اگر یک دایره حول قطرش دوران کند ،یک کره ، وا گر یک ضلع مستطیل حول ضلع مقابلش دوران کند ، قسمتی از یک ا ستوانه ،به دست می آید. در این جا ، می خواهیم فرمولی برای محاسبه مساحت رویه های دوار ارائه می دهیم. فرض کنیم $y = f(x)$ در $[a,b]$ نامنفی باشد و نمودار آن حول محور x دوران کند.


z
y
a
f
b
f
x

مساحت رویه S برابراست با

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{[f'(x)]^2 + 1}\,dx$$

مثال:

فرمولي براي محا سبه مساحت سطح جانبی یک مخروط به ارتفاع h وشـــعاع

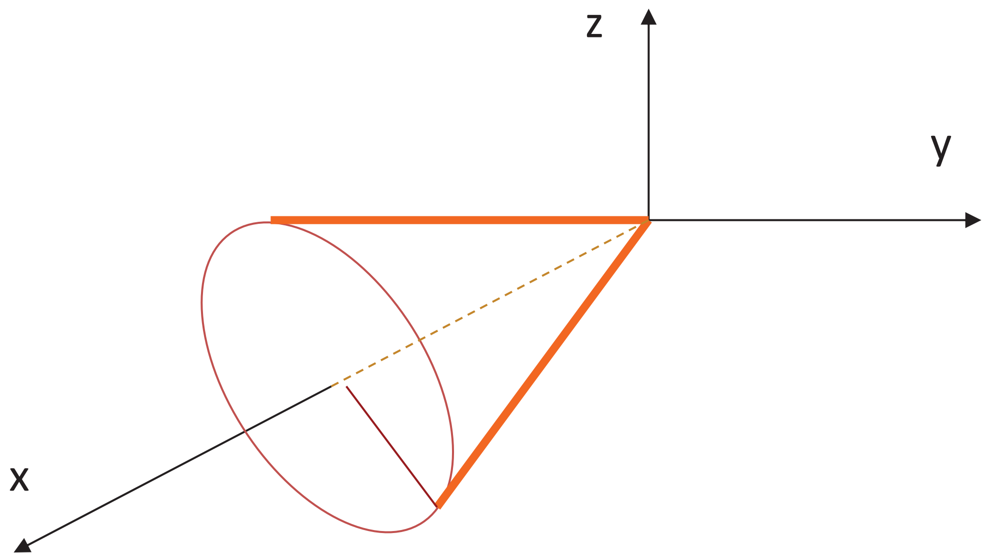
قاعده r به دست آورید.

حل:

راس این مخروط را در مبدا مختصات و محور آن را روی محور x قرار می دهیم .
در این صورت ، این مخروط از دوران خط

$$y = \frac{r}{h}x \qquad , \qquad 0 \le x \le h$$

حول محور x به دست می آید. در نتیجه مساحت مخروط برابر است با



$$S = 2\pi \int_0^h \frac{r}{h} x \sqrt{\left(\frac{r}{h}\right)^2 + 1}\, dx$$

$$= \frac{2\pi r}{h^2} \sqrt{r^2 + h^2} \int_0^h x\, dx = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} \quad .$$

انتگرال سه گانه

انتگرال سه گانه درمورد توابع سه متغیر ه حقیقی تعریف می شود. این تعریف مشابه با تعریف انتگرال دو گانه توابع دو متغیر ه است. فرض کنیم R ناحیه بسته و محدودی در صفحه xy و ناحیه ای در فضا باشد ،به طوری که مشتق های F_1 و F_2 روی R پیوسته

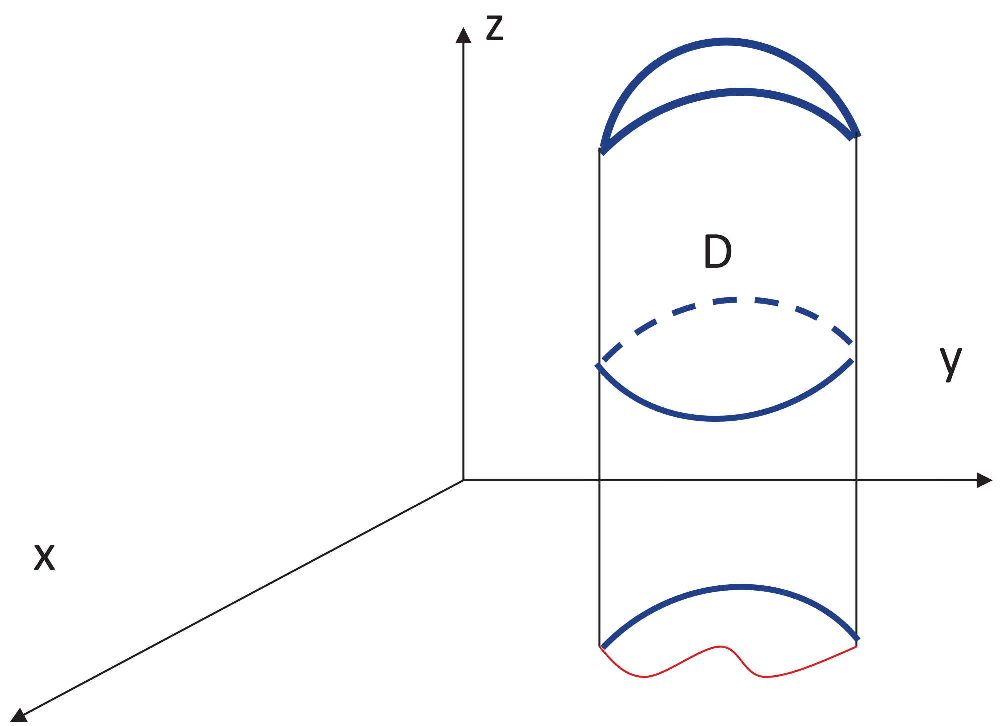
باشند. به طور هندسی ، D بین دو رویه

$$D = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in R \quad , \quad F_1(x, y) \le z \le F_2(x, y)\}$$

بالا و پایین R ، واقع است . در شکل زیر نمونه ای از ناحیه D را مشا هــده

می کنیم.

$$z = F_2(x, y) \qquad z = F_1(x, y)$$



فرض کنیم D توسط صفحه های موازی با صفحه های مختصات تقسیم بندی

شود و $D_1, D_2, \ldots, D_n$ مکعب مستطیل هایی باشند که کاملاً در درون D

قرار دارند.

اگر ΔV_i نمایش حجم D_i و (u_i, v_i, w_i) نقطه ای در D_i باشد ، آنگاه :

$$\sum_{i=1}^{n} f(u_i, v_i, w_i)\Delta V_i$$

را یک مجموع ریمانی f می نامیم . اگر d نمایش بزرگترین قطر D_i ها باشد ،

آنگاه انتگرال سه گانه f روی D برابر است با

$$\iiint_D f(x,y,z)dV = \lim_{d \to 0} \sum_i f(u_i, v_i, w_i)\Delta V_i$$

به شرطی که این حد وجود داشته باشد .می توان نشان داد که اگر تابع f روی

D پیوسته باشد،آنگاه انتگرال سه گانه f روی D وجود دارد.

همچنین ، اگر f روی D پیوسته باشد ، آنگاه

$$\iiint\limits_{D} f(x,y,z)dV = \iint\limits_{R} \left[\int_{F_1(x,y)}^{F_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dA$$

به ویژه اگر R نا حیه اي به صورت شکل هاي اسلاید شماره 256باشد ،آنگاه به ترتیب داریم:

$$\iiint\limits_{D} f(x,y,z)dV = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} \int_{z=F_1(x,y)}^{z=F_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

$$\iiint\limits_{D} f(x,y,z)dV = \int_{y=c}^{y=d} \int_{x=h_1(y)}^{x=h_2(y)} \int_{z=F_1(x,y)}^{z=F_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$$

مثال:

فرض کنید D بین دو رویه $z=3-x^2-y^2$ و $z=-5+x^2+y^2$ به ازای

$x\geq 0$ و $y\geq 0$، قرار داشته باشد. انتگرال سه گانه $\iiint_D y\,dV$ را به صورت

یک انتگرال مکرر(سه گانه) بنویسید.

حل:

برای تعیین ناحیه R در صفحه xy که Dبین دو رویه داده شده و در بالا یا پایین

R قراردارد،ابتدا محل تلاقی این دو رویه راپیدا می کنیم. نقطه (x,y,z)بر محل

تلاقی این دو رویه واقع است. اگر $3-x^2-y^2=-5+x^2+y^2$ یا $x^2+y^2=4$.

بنابراین R، ناحیه محدود به دایره $x^2+y^2=4$ در ربع اول صفحه xy است.

چون به ازای (x,y) در R ، $3-x^2-y^2 \geq -5+x^2+y^2$ پس:

$$\iiint_D y\,dV = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_{-5+x^2+y^2}^{3-x^2-y^2} y\,dz\,dx\,dy$$

تذکر:

اگر D جسم محدود به نمودارهای توابع پیوسته دو متغیره F_1 و F_2 روی ناحیه R در صفحه xy باشد، آنگاه حجم R برابر است با

$$V = \iiint_R 1\,dV$$

مثال:

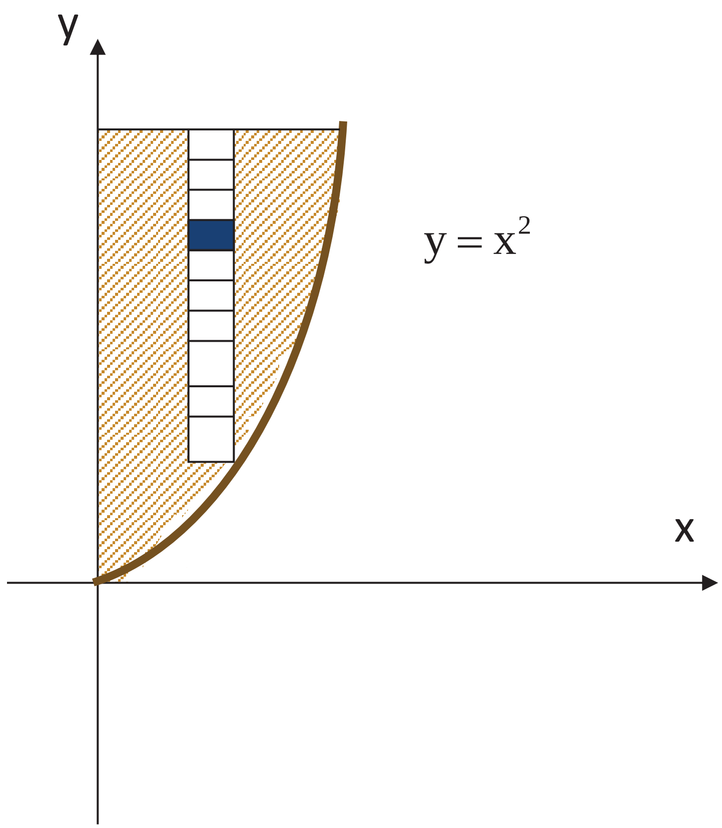
حجم جسم D محدود به صفحه $y+z=4$ و استوانه $y=x^2$ را در هشت یک اول دستگاه مختصات xyz محاسبه کنید.

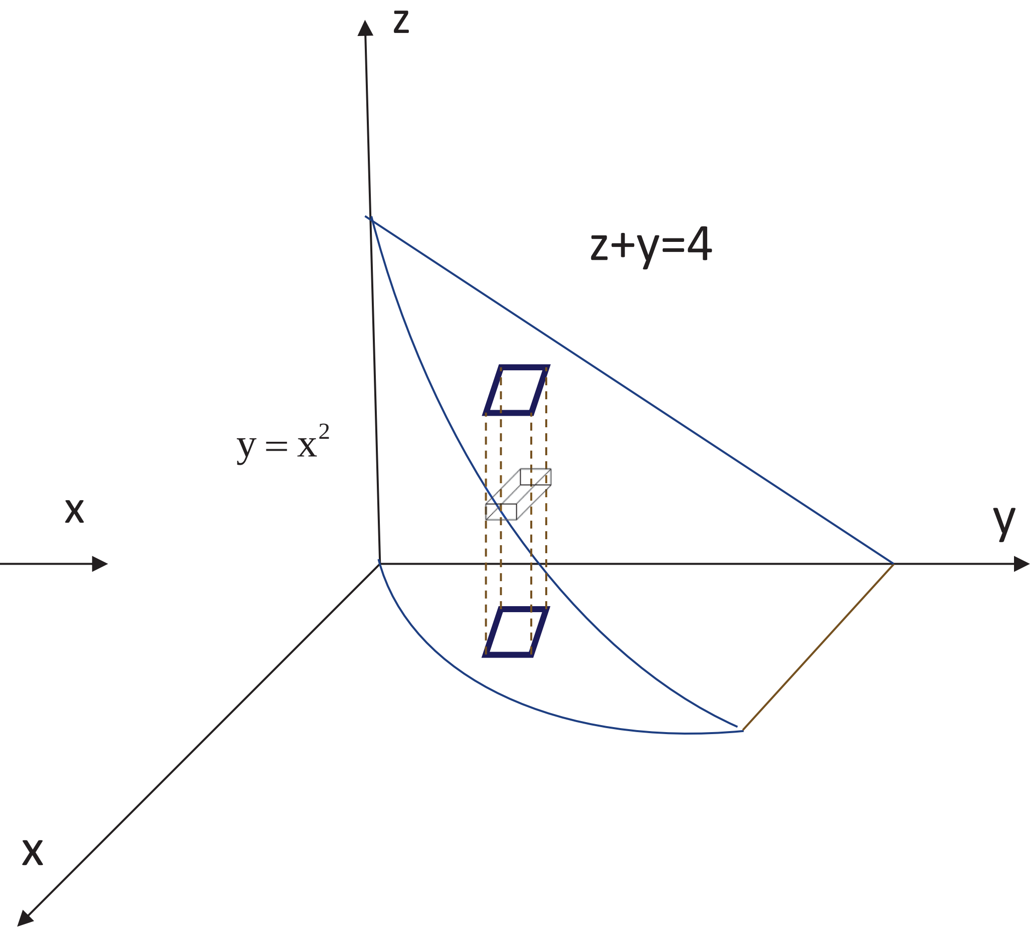
حل:

جسم D و سطح مقطع آن در صفحه xy در شکل اسلاید بعدی نشان داده شده اند.

بنابراین حجم جسم D برابر است با

$$V=\iiint_D 1\,dV=\int_0^2\int_{x^2}^4\int_0^{4-y} dz\,dy\,dx$$


y
$y = x^2$
x


z
z+y=4
$y = x^2$
y
x

$$= \int_0^2 \int_{x^2}^4 (4-y)\,dy\,dx = \int_0^2 \left(4y - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2}^{4} dx$$

$$= \int_0^2 \left(8 - 4x^2 + \frac{x^4}{2}\right)dx = \left(8x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{x^5}{10}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{128}{15} \quad .$$

تذکر:

در مورد تابع سه متغیره ژاکوبین بطور مشابه چنین تعریف می شود :

$$u = u(x, y, z)$$
$$v = v(x, y, z) \qquad w = w(x, y, z)$$

$$\frac{1}{J}\left(\frac{u, v, w}{x, y, z}\right) \equiv \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

در مختصات استوانه ای ژاکوبین برابر r و در مختصات کروی برابر $\rho^2 \sin\varphi$ می باشد.

انتگرال سه گانه در مختصات استوانه ای

فرض کنیم R ناحیه شکل زیر در مختصات قطبی باشد و

$$D = \left\{ (r,\theta,z) \middle| \ (r,\theta) \in R \ , \ F_1(r,\theta) \le z \le F_2(r,\theta) \right\}$$

که در آن مشتق های F_1 و F_2 در R پیوسته هستند .در این صورت اگر تابع

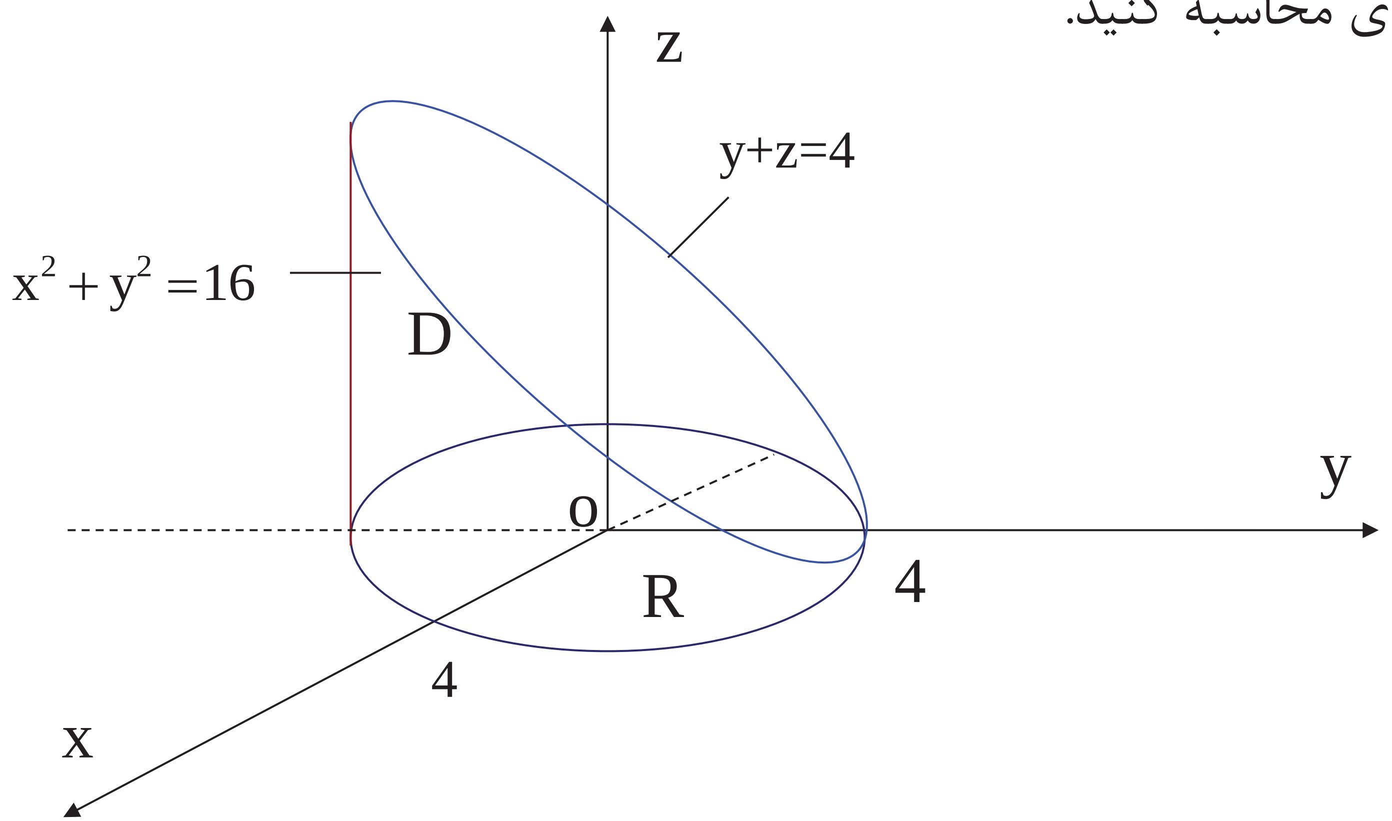
سه متغیر ه f در D پیوسته باشد،آنگاه داریم:

$$\iiint_D f(r,\theta,z)dV = \iint_R \left[\int_{F_1(r,\theta)}^{F_2(r,\theta)} f(r,\theta,z)dz \right] dA$$

$$= \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{F_1(r,\theta)}^{F_2(r,\theta)} f(r,\theta,z) r dz dr d\theta$$

مثال:

فرض کنید D ناحیه محدود به صفحه های $y+z=4$ ، $z=0$ و استوانه $x^2+y^2=16$ باشد . انتگرال سه گانه $\iiint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dV$ را در مختصات استوانه ای محاسبه کنید.



حل:

ناحیه R در مختصات قطبی بین نمودارهای $r=0$, $r=4$، در بازه $0\le\theta\le2\pi$

واقع است .بنابراین، ناحیه D در مختصات استوانه ای از پایین به دایره $r=4$

و از بالا به نمودار $z=4-y=4-r\sin\theta$ محدود است . درنتـــــــــیجه

چون ، $\sqrt{x^2+y^2}=r$ پس

$$\iiint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dV=\int_0^{2\pi}\int_0^4\int_0^{4-r\sin\theta} r.rdz\,drd\theta \quad =\int_0^{2\pi}\int_0^4 r^2z\Big|_0^{4-r\sin\theta} drd\theta$$

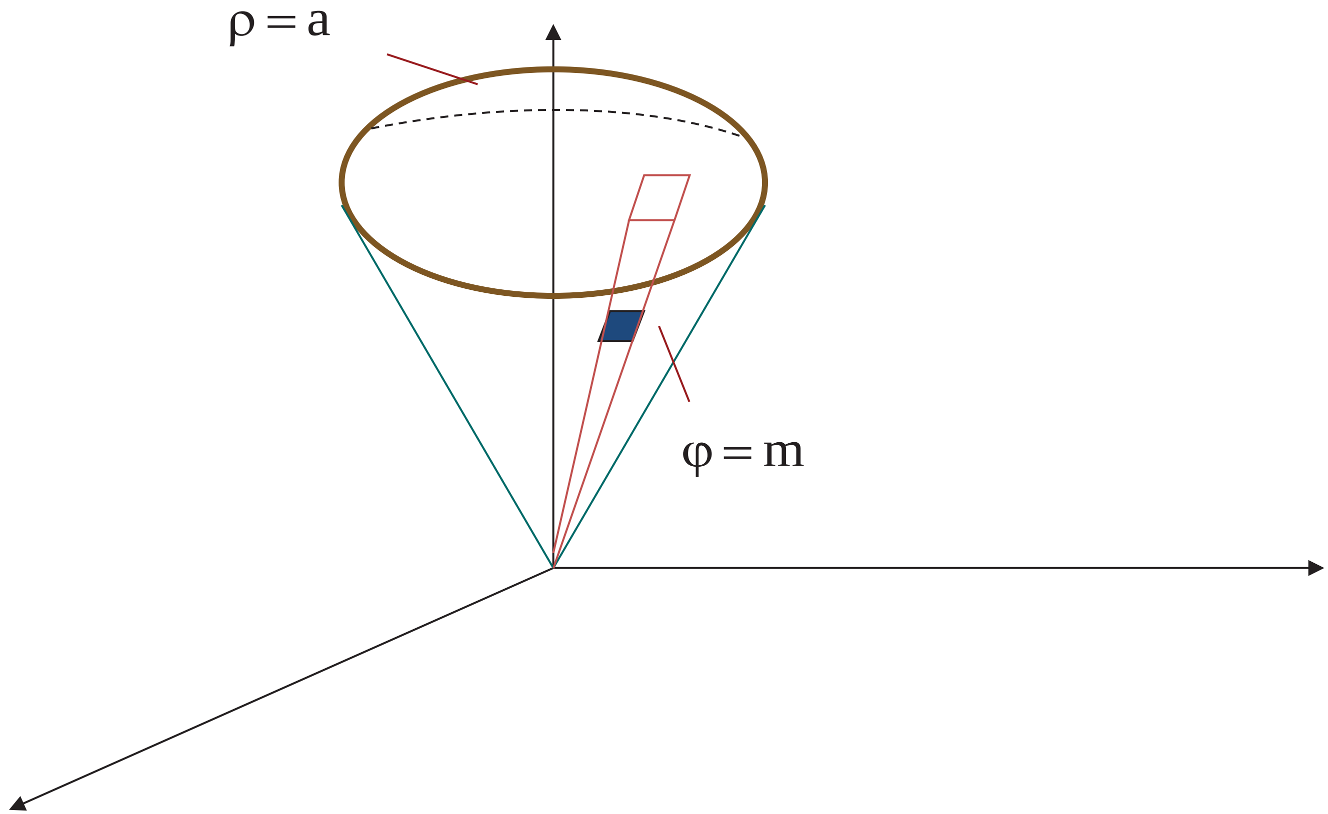
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^4(4r^2-r^3\sin\theta)\,drd\theta=\int_0^{2\pi}\left(\frac{4}{3}r^3-\frac{r^4}{4}\sin\theta)\right|_0^4 d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{256}{3}-64\sin\theta\right)d\theta=\left(\frac{256}{3}\theta+64\cos\theta\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{512}{3}\pi \ .$$

مثال:

حجم ناحیه D را که از بالا به کره $\rho = a$ و از پایین به مخروط $\varphi = m$ با

$0 < m < \pi/2$ محدود است ، محاسبه کنید .



حل:

ناحیه D مجموعه نقاط (ρ,φ,θ) است به طوری که

$$0\le\rho\le a \quad , \quad 0\le\varphi\le m \quad , \quad 0\le\theta\le 2\pi$$

بنابراین

$$V=\iiint_D 1\,dV=\int_0^{2\pi}\int_0^{m}\int_0^{a}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{m}\frac{\rho^3}{3}\sin\phi\Big|_0^a\,d\phi\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{m}\frac{a^3}{3}\sin\phi\,d\phi\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}-\frac{a^3}{3}\cos\phi\Big|_0^m\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{a^3}{3}(1-\cos m)\,d\theta=\frac{2\pi a^3}{3}(1-\cos m)\;.$$

مثال: انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\iiint_D \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\, dV$$

که در آن D ناحیه بالای صفحه xy از بیضی گون زیر است:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

مثال: حجم محصور بین مخروط های $z=\sqrt{\frac{1}{3}(x^2+y^2)}$ ، $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ و زیر صفحه $z=1$ را به دست آورید.

مباحثی در آنالیز برداری

مقدمه وهدف کلی

در این فصل پایانی حساب دیفرانسیل و انتگرال نوع دیگری از توابع را به نام میدان برداری، که بردارهایی به نقاط فضا نسبت می دهند ، مورد مطالعه قرار می د هیم . میدان گرانش و میدان الکتریکی مثالهایی از میدان برداری هستند. مباحث مورد بحث ما انتگرال منحنی الخط، انتگرال رویه ای و قضیه های مهم گرین ، استوکس و واگرایی هستند، که تعمیم قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال هستند.

۹. ۱. ۱ تعریف

اگر $R^3 \supseteq D$ ، آنگاه هر تابع $\vec{F} : D \to R^3$ را یک میدان برداری با دامنه D می گوییم.

از آنجا که هر بردار را میتوان توسط سه مولفه اش نمایش داد، یک میدان برداری $\vec{F}$ را به صورت

$$\vec{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\vec{i} + N(x,y,z)\vec{j} + P(x,y,z)\vec{k}$$

به طورساده

$$\vec{F} = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}$$

نمایش می دهیم، که در آن P,N,M توابعی حقیقی روی دامنه $\vec{F}$ هستند.

اگر P,N,Mسه تابع ثابت باشند، $\vec{F}$ رایک میدان برداری ایستا و در غیر این

صورت آن را یک میدان برداری پویا (یا دینامیک) گوییم.

به عنوان مثال، $\vec{F}(x,y,z) = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ یک میدان برداری ایستا و

$$\vec{F}(x,y,z) = z\vec{i} - \vec{j} - x\vec{k}$$

یک میدان برداری پویاست .

در حالت خاصی که دامنه و برد $\vec{F}$ در صفحهxy هستند، $\vec{F}$ را توسط بردارهایی

در صفحه xyنمایش میدهیم.

گرادیان به عنوان یک میدان برداری

فرض کنیم f یک تابع سه متغیره با مشتـــــقات جزئی پیوسته است. گرادیان f ،

یعنی

$$\nabla f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\vec{k}$$

یا به طور ساده $\nabla f = f_x\vec{i} + f_y\vec{j} + f_z\vec{k}$ یک میدان برداری است. اگر $\vec{F} = \nabla f$

آنگاه $\vec{F}$ را یک میدان برداری پایستار (کنسرواتیو یا نگهدارنده) و f را تابع پتانسیل می نامیم.

بسیاری از میدانهای برداری در فیزیک پایستار هستند.

مثال:

تابع دو متغیره f را پیدا می کنیم به طوری که $\nabla f(x,y) = y^3\vec{i} + 3xy^2\vec{j}$

حل :

$$\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} = \nabla f(x,y) = y^3\vec{i} + 3xy^2\vec{j}$$

پس

(*)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^3 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2$$

با انتگرالگیری از معادله اول نسبت به x، داریم:

$$f(x,y) = xy^3 + g(y)$$

که در آن $g(y)$ نسبت به x ثابت است. مشتق جزئی اول این عبارت نسبت به

y برابر است با

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2 + \frac{dg}{dy}$$

با مقایسه این عبارت و معادله دوم (❊)،

داریم $\frac{dg}{dy}=0$ و در نتیجه $g(y)=c$

- که در آن c یک مقدار ثابت است. بنابراین . $f(x,y)=xy^3+c$

کرل (چرخه یا گردش) یک میدان برداری

تعریف:

فرض کنیم $\vec{F} = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}$ یک میدان برداری است به طوری که

مشتقهای جزئی اول Nو M و P وجود دارند. در این صورت، چرخه $\vec{F}$

،به نمایش $\operatorname{curl}\vec{F}$ یا $\nabla \times \vec{F}$ ، یک میدان برداری با تعریف زیر است:

$$\operatorname{curl}\vec{F}(x,y,z) = \nabla \times \vec{F}(x,y,z)$$
$$= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\vec{k}$$

برای آسانتر به خاطر سپردن $\text{curl}\vec{F}$ آن را به صورت نماد دترمینانی زیر

نمایش می دهیم:

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ M & N & P\end{vmatrix}$$

مثال:

چرخه میدان برداری $\vec{F}$ را پیدا کنید :

$$\vec{F}(x,y,z)=(3y^2z^2-1)\vec{i}+\left(4xy^2\right)\vec{j}+(4xy+2)\vec{k}$$

قضیه:

اگر $\vec{F}=M\vec{i}+N\vec{j}+P\vec{k}$ یک میدان برداری پایستار باشد.(یعنی اگر تابع f با مشتق های جزئی پیوسته وجود داشته باشد به طوری که $\vec{F}=\nabla f$)

آنگاه

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}\quad,\quad\frac{\partial M}{\partial z}=\frac{\partial P}{\partial x}\quad,\quad\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial z}\qquad (*)$$

یعنی: $$\nabla\times\vec{F}=0$$

اگر دامنه $\vec{F}$ تمام فضا باشد، عکس این حکم نیز صادق است.

مثال :

ثابت کنید که عبارت زیر کنسرواتیو است و تابع پتانسیل آن را بدست آورید .

$$\vec{V}=(x+2y-z)\vec{i}+(2x-y+z)\vec{j}+(-x+y+2z)\vec{k}$$

حل:

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+2y-z & 2x-y+z & -x+y+2z \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftarrow$ $\vec{V}$ یک میدان برداری کنسرواتیو است .

طبق تعریف : $\exists F \quad \nabla F = \vec{V} \Rightarrow$

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}$$

$$= V_1\vec{i} + V_2\vec{j} + V_3\vec{k}$$

ادامه جواب :

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = V_1 = x + 2y - z$$

$$\Rightarrow F(x, y, z) =$$

$$\frac{1}{2}x^2 + 2yx - zx + E(y, z) \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = 2x + E_y(y, z) = V_2 = 2x - y + z$$

$$\Rightarrow E_y(y, z) = -y + z$$

ادامه جواب :

$$E(y,z)=\int(-y+z)dy$$

$$=-\frac{1}{2}y^{2}+yz+h(z)\quad(2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow F(x,y,z)=\frac{1}{2}x^{2}+2xy-zx$$

$$+yz-\frac{1}{2}y^{2}+h(z)\quad(3)$$

$$\Rightarrow\frac{\partial F}{\partial z}=-x+y+h_{z}(z)=V_{3}$$

ادامه جواب :

$$,V_{3} = -x + y + 2z \Rightarrow h_{z}(z) = 2z$$

$$h(z) = \int 2z\,dz = z^{2} + c \quad (4)$$

$$3,4 \Rightarrow F(x, y, z) = \frac{1}{2}x^{2} + 2xy$$

$$- zx - \frac{1}{2}y^{2} + z^{2} + z + c$$

انتگرال خط (منحنی الخط) نوع اول:

C عبارت از خم $\quad C(t)=\left(x(t),y(t),z(t)\right) \quad a\le t\le b$

انتگرال روی خم f(x,y,z) در مسیر C :

$$\int_C f(x,y,z)ds=\int_a^b f(c(t))\left\|c'(t)\right\|dt$$

$$=\int_a^b f\left(x(t),y(t),z(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2+\left(z'(t)\right)^2}\,dt$$

مثال :

انتگرال روی خم روبرو را محاسبه کنید : $\int_C ye^{-x}\,ds$

که C عبارت است از خم زیر :

$$x(t)=\ln(1+t^2)$$
$$y(t)=2\tan^{-1}t-t+3$$
$$,(0\le t\le 1)$$

حل:

$$\int_C ye^{-x}\,ds$$

$$=\int_0^1 \frac{2\tan^{-1}t-t+3}{1+t^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2+\left(\frac{2}{1+t^2}-1\right)}\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{2\tan^{-1} t - t + 3}{1+t^2} dt$$

ادامه پاسخ :

$$= 2\int_0^1 \tan^{-1} t\, d\left(\tan^{-1} t\right) - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt +$$

$$3\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

ادامه پاسخ :

$$= \left(\tan^{-1} t\right)^2 - \frac{1}{2} Ln\left(1+t^2\right)$$

$$+ 3\tan^{-1} t \Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} Ln 2 + \frac{3\pi}{4}$$

انتگرال خط (منحنی الخط) نوع دوم

فرض کنیم جسمی تحت اثر نیروی $\vec{F} = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}$ روی منحنی هموار C

به معادله برداری $\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$ حرکت می کند. اگر این جسم

قسمت کوچکی از منحنی C را بپیماید، این قسمت ازمنحنی تقریباً یک خط

راست است ودرنتیجه مقدار کار انجام شده تقریباً برابراست با حاصلـــــــــضرب

$\Delta W = \vec{F}.\Delta\vec{r}$ ، زیرامولفه $\vec{F}$ روی $\Delta\vec{r}$ باعث حرکت جسم روی Cمی شود. بنابراین

اگر منحنی محدودC رادر نقاط $P_n, \ldots, P_2, P_1$ به کمان های کوچک افراز کنیم

آنگاه مقدار کارانجام شده تقریباً برابراست با،

$$\vec{F}(P_1).\Delta\vec{r}_n + \vec{F}(P_2).\Delta\vec{r}_n + \ldots \vec{F}(P_n).\Delta\vec{r}_n$$

در نتیجه مقدار کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ برابراست با حد این مجموع

وقتی $n \to \infty$ ودر نتیجه

$$W = \int_C \vec{F}.d\vec{r}$$

انتگرال بالارا انتگرال خط (منحنی الخط) نوع دوم روی C می گوییم.

به آسانی دیده می شود که اگر جهت حرکت جسم روی منحنی C از B به A،

یا به طور کلی ،اگر جهت منحنی C– مخالف با جهت C باشد ، آنگاه

$$\int_{-C} \vec{F}.d\vec{r} = -\int_{C} \vec{F}.d\vec{r} \ .$$

مثال:

جسمی تحت اثر نیروی $\vec{F}(x,y,z) = -zy\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}$ روی مارپیـــچ C

به معادله $0 \le t \le 2\pi \quad , \quad \vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\vec{k}$ به سمت بالا

حرکت می کند .کار انجام شده توسط این نیرو را محاسبه کنید.

حل:

چون

$$x = f(t) = \cos t \quad , \quad \frac{dx}{dt} = f'(t) = -\sin t$$

$$y = g(t) = \sin t \quad , \quad \frac{dy}{dt} = g'(t) = \cos t$$

$$z = h(t) = t \quad , \quad \frac{dz}{dt} = h'(t) = 1$$

پس کار انجام شده برابراست با

$$W = \int_C \vec{F}.d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left[(-t\sin t)(-\sin t) + (t\cos t)\cos t + \sin t\cos t\right] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (t + \sin t\ \cos t)\, dt$$

$$= \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}\sin^2 t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 2\pi^2 \quad .$$

تذکر

فرض کـــــــنیم منحنی C هموار نباشد ولی مرکب از منحنی های هموار

$C_1, C_2, ..., C_n$ باشد. به عبارت دیگر،اگر Cبه طور قطعه ای هموار باشد،آنگاه

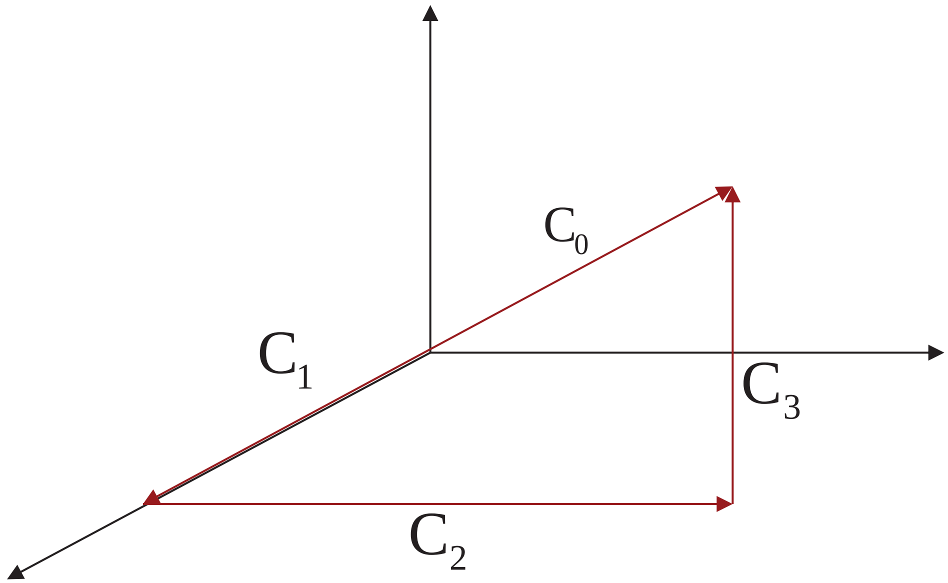
$$\int_C \vec{F}\,.d\vec{r} = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} \vec{F}\,.d\vec{r}$$

مثال:

فرض کنید C_0, C_1, C_2, C_3 منحنی های شکل زیر با جهـــت های داده

شده باشند.اگر C تر کیب C_1, C_2, C_3 باشد، نشان دهید که

$$\int_C yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = \int_{C_0} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$



حل:

معادلات پارامتری منحنی های داده شده عبارتند از:

$$C_0 : \vec{r}_0(t) = t\vec{i} + t\vec{j} + t\vec{k} \quad , \; 0 \le t \le 1 \qquad \left(\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 1 \right)$$

$$C_1 : \vec{r}_1(t) = t\vec{i} \quad , \; 0 \le t \le 1 \qquad \left(\frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0, \frac{dx}{dt} = 1 \right)$$

$$C_2 : \vec{r}_2(t) = \vec{i} + t\vec{j} \quad , \; 0 \le t \le 1 \qquad \left(\frac{dx}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 1 \right)$$

$$C_3 : \vec{r}_3(t) = \vec{i} + t\vec{j} + t\vec{k} \; , \; 0 \le t \le 1 \qquad \left(\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 1 \right)$$

بنابراین

$$\int_{C} yz\,dx + xz\,dy\,xy\,dz = \int_{C_1}\left[(0.0)1 + (t.0)0 + (t.0)0\right]dt$$

$$+\int_{C_2}\left[(t.0)0 + (1.0)1 + (1.t)0\right]dt$$

$$+\int_{C_3}\left[(1.t)0 + (1.t)0 + (1.1)1\right]dt$$

$$= \int_0^1 0\,dt + \int_0^1 0\,dt + \int_0^1 1\,dt = 1$$

و

$$\int_{C_0} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = \int_0^1\left[(t.t)1 + (t.t)1 + (t.t)1\right]dt$$

$$= \int_0^1 3t^2\,dt = 1$$

در نتیجه حکم مساله اثبات شده است

مثال :

مطلوبست محاسبه انتگرال $I = \int_C xydx + (y - x)dy$

در مسیر خطهای زیر که دو نقطه (0,0) و (1,1) را به یکدیگر وصل

می کنند :

الف) خط **y=x** :

حل:

$$I = \int_0^1 \left[x^2 + (\cancel{x} - \cancel{x})dx\right] = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

ب)سهمی $y=x^2$:

حل:

$$I = \int_0^1 \left\lfloor x^3 + 2\left(x^2 - x\right)x \right\rfloor \, dx$$

$$= \int_0^1 \left(3x^3 - 2x^2\right) dx$$

$$= \frac{3}{\square} x^{\square} - \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{3}{\square} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$$

ج) سهمی $y^2=x$:

حل:

$$I=\int_0^1\left[x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\left(x^{\frac{1}{2}}-x\right)x^{-\frac{1}{2}}\right]dx$$

$$=\int_0^1\left[x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)\right]dx$$

$$=\frac{2}{\square}x^{\frac{\square}{2}}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\,\square\frac{3}{2}\,x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{\square}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1\square}{30}$$

قضیه اساسی انتگرال خط:

فرض کنیم Cیک منحنی جهت دار هموار (یا قطعه ای هموار)با نقطه ابتدایی

(x_0, y_0, z_0) وانتهایی (x_1, y_1, z_1) باشد. فرض کنیم میدان برداری $\vec{F}$ روی C

پیوسته و $\vec{F} = \text{grad} f = \nabla f$ ، که درآن f روی C مشتقپذیر است دراین صورت

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r} = \int_C \nabla f.d\vec{r} = f(x_1, y_1, z_1) - f(x_0, y_0, z_0) \quad .$$

تذکر

اگر $\vec{F}$ یک میدان برداری پیوسته با دامنه D باشدبه طوری که برای هر دو

منحنی جهت دار C_1, C_2 در D ، با ابتدا وانتهای یکسان ،

$$\int_{C_1} \vec{F}.d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F}\,d\vec{r}$$

آنگاه می گوییم که $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$ مستقل از مسیر است . بنابراین ، قضیه اساسی

انتگـــرال خط بیان می کند که اگر $\vec{F}$ پایستار باشد آنگاه $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$ مستقل

از مسیر است.

مثال:

فرض کنید منحنی C از $(1,-1,-\frac{1}{2})$ تا $(1,1,\frac{1}{2})$ توسط

$$\vec{r}(t) = -\cos \pi t^4 \vec{i} + t^{5/3} \vec{j} + \frac{t}{t^2+1} \vec{k} \quad , \quad -1 \leq t \leq 1$$

داده شده باشد و

$$\vec{F}(x,y,z) = (2xy + z^2)\vec{i} + x^2 \vec{j} + (2xz + \pi \cos \pi z)\vec{k} \; .$$

انتگرال خط $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$ را پیدا کنید.

حل:

$\vec{F} = \nabla f$ ، که در آن

$$f(x, y, z) = x^2 y + xz^2 + \sin \pi z \quad .$$

در نتیجه ، با توجه به قضیه اساسی انتگرال خط ، داریم

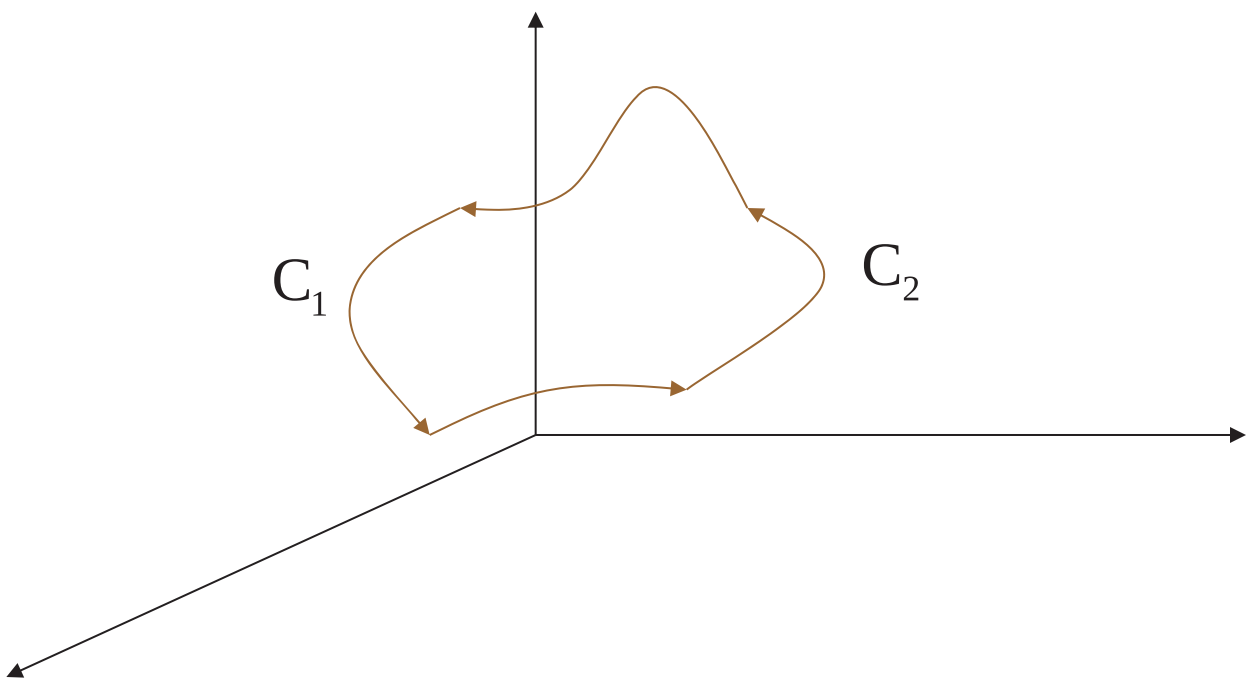
$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f\left(1,1,\frac{1}{2}\right) - f\left(1,-1,-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{4} + 1\right) - \left(-1 + \frac{1}{4} - 1\right) = 4 \quad .$$

فرض کنیم $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$ مستقل از مسیر باشد . اگر C یک منحنی بسته باشد،

آنگاه $\int_C \vec{F}.d\vec{r} = 0$ زیرا C را می توان ترکیب دومتغیر منحنی جهت دار

C_1, C_2 در نظر گرفت که در آن انتهای C_1 و ابتدای C_1 انتهای C_2 است.



چون ابتدا وانتهای دم منحنی ر $C_1 -$ وC_2 یکسانند،پس

$$\int_C \vec{F}\,.d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F}\,.d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F}\,d\vec{r}$$

$$= \int_{C_1} \vec{F}.d\vec{r} + \int_{-C_1} \vec{F}\,d\vec{r} = 0\ .$$

همچنین ،اگر برای هر منحنی جهت دار وبسته C در D ، $\int_C \vec{F}.d\vec{r} = 0$

آنگاه $\vec{F}$ پایستار است ،یعنی $\vec{F} = \nabla f$. بنابراین احکام زیر معادل اند:

۱. $\vec{F} = \mathrm{grad} f$ ، یعنی $\vec{F}$ پایستار است.

۲. $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$ مستقل از مسیر است.

۳. برای هر منحنی جهت دار وبسته C در دامنه ، $\vec{F}$ $\int_C \vec{F}.d\vec{r} = 0$

قضیه گرین:

فرض کنیم ناحیه R در صفحه xy توسط منحنی جهت دار قـــطعه ای هموار ، ساده وبسته C محدود شده و M و N دومتغیر تابع دومتغیر ه با مشتقات جزئی پیوسته باشند . در این صورت

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA \ .$$

مثال

فرض کنید $M(x,y)=-x^2y$, $N(x,y)=x^3$ و C دایره $x^2+y^2=4$

است. مقدار انتگرال $\oint_C M\,dx+N\,dy$ را محاسبه کنید.

حل:

محاسبه این انتگرال به طور مستقیم چندان مشکل نیست ،ولی استفاده از قضیه گرین ساده تر است. چون

$$\oint_C M\,dx+N\,dy=\iint_R\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dA\ .$$

$$=\iint_R(3x^2+x^2)\,dA$$

$$= \iint_R 4x^2 \, dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 4(r\cos\theta)^2 r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 4r^3 \cos^2 \theta dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos^2 \theta) r^4 \Big|_0^2 d\theta$$

$$= 16 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta$$

$$= 16 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta$$

$$= 16 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right) \Bigg|_0^{2\pi} = 16\pi \ .$$

تعمیم قضیه گرین:

فرض کنید C و C_1 دو منحنی بسته ساده بوده و C_1 به طور کامل درون C باشد.
همچنین فرض کنید $\vec{F} = Mi + Nj$ میدانی تعریف شده بر ناحیه ای باز حاوی دو منحنی C و C_1 و مجموعه نقاط بین این دو منحنی بوده، بر این ناحیه مشتقات جزئی پیوسته داشته باشد. در این صورت

$$\oint_C Mdx + Ndy = \oint_{C_1} Mdx + Ndy + \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

که در آن R ناحیه بین دو منحنی C و C_1 می باشد.

مثال: مطلوب است محاسبه $\oint_C \frac{-y}{4x^2+y^2}dx + \frac{x}{4x^2+y^2}dy$ که در آن

الف) C بیضی $4x^2+y=a^2$ ($a>0$) است.

ب) C دایره $x^2+y^2=1$ است.

انتگرال سطح (رویه)

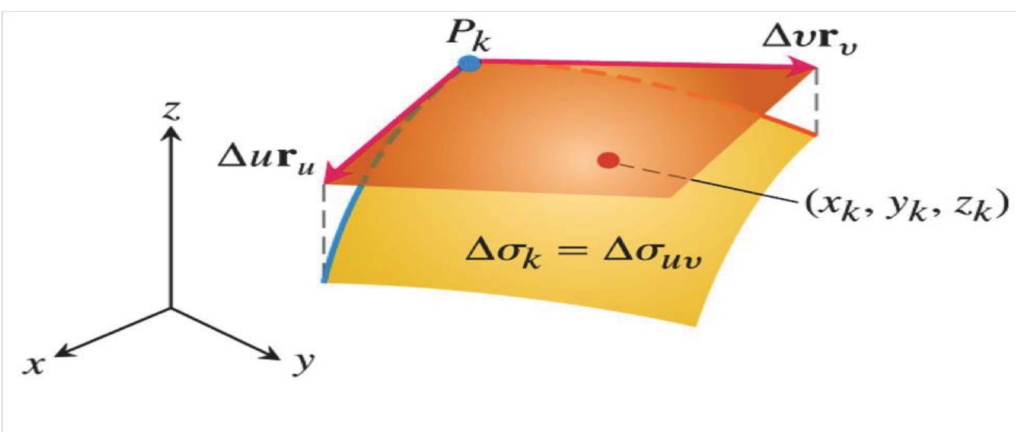
انتگرال سطح نوع اول:

فرض کنیم سطح S در فضا دارای معارله ای به صورت

$$z = g(x, y), \qquad (x, y) \in D \subseteq R^2$$

بوده و g مشتق پذیر باشد. همچنین فرض کنید f تابعی پیوسته تعریف شده در یک همسایگی سطح S باشد. در این صورت

$$\iint_S f d\sigma = \iint_D f(x, y, g(x, y))\sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\, dxdy$$



مثال: مطلوب است محاسبه انتگرال زیر

$$\iint_S (x^2 + yz)\,d\sigma$$

که در آن S قسمتی از صفحه $x + y + z = 1$ در $\frac{1}{8}$ اول فضا می باشد.

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرال $\iint_S (x^2+y^2)d\sigma$ که در آن S قسمتی از مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ زیر صفحه $z=1$ است.

مثال: مطلوب است محاسبه $\oiint_S xyz\,d\sigma$ که S سطح بسته متشکل از استوانه $x^2+y^2=1$ و صفحات $z=1$ و $z=3$ می باشد.

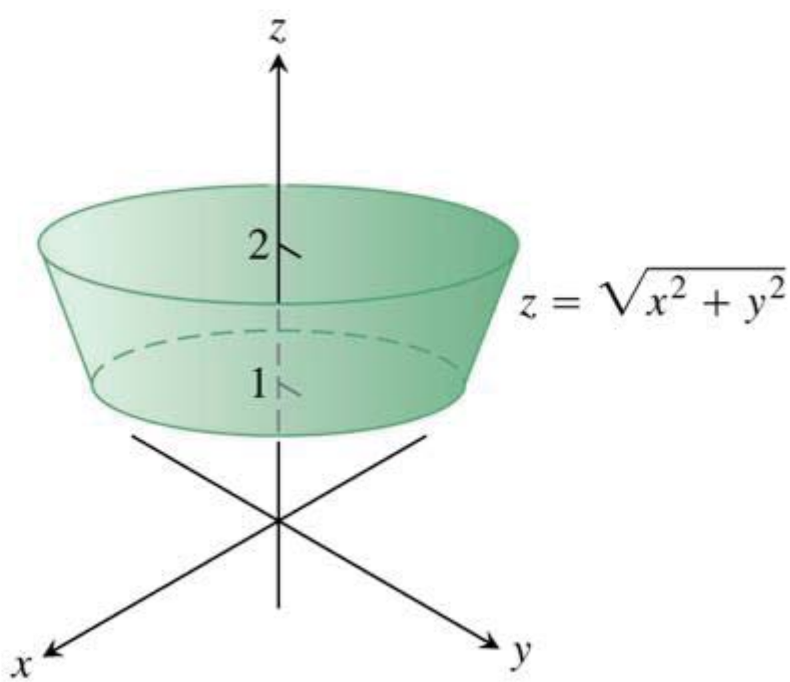
مساحت جانبی رویه

مساحت جانبی رویه S به صورت زیر به دست می آید:

$$\iint_S d\sigma$$

مثال: مطلوب است محاسبه مساحت قسمتی از کره $x^2+y^2+z^2=3$ درون مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

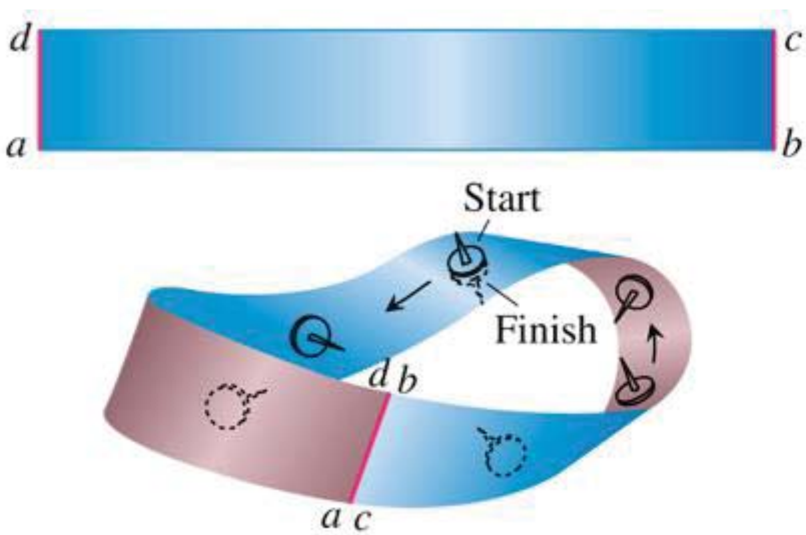
مثال: مساحت قسمتی از مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ بین صفحات $z=1$ و $z=2$ به دست آورید.



انتگرال سطح نوع دوم

فر ض کنید S رویه ای در فضای R^3 باشد. در این صورت سطح S را جهت پذیر گوییم هرگاه بتوانیم به هر نقطه از سطح S یک بردار قائم یکه نظیر کرده و این تناظر به گونه ای باشد که با حرکت بر روی سطح متناظر به طور پیوسته تغییر نماید. برای چنین سطحی می توان با توجه به جهت کلی بردارهای قائم یکه بر سطح جهت مثبت و جهت منفی را تعریف نمود.

مثال: نوار موبیوس جهت پذیر نیست.



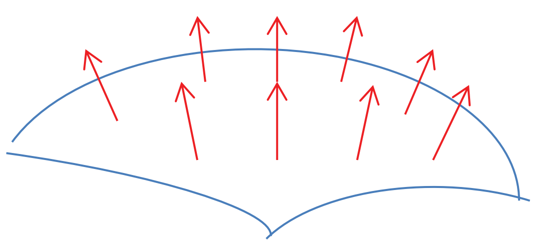
تعریف: فرض کنید S یک سطح جهت پذیر، $\vec{n}: S \to R^2$ میدان متناظر بردارهای قائم یکه تعریف شده بر سطح S و

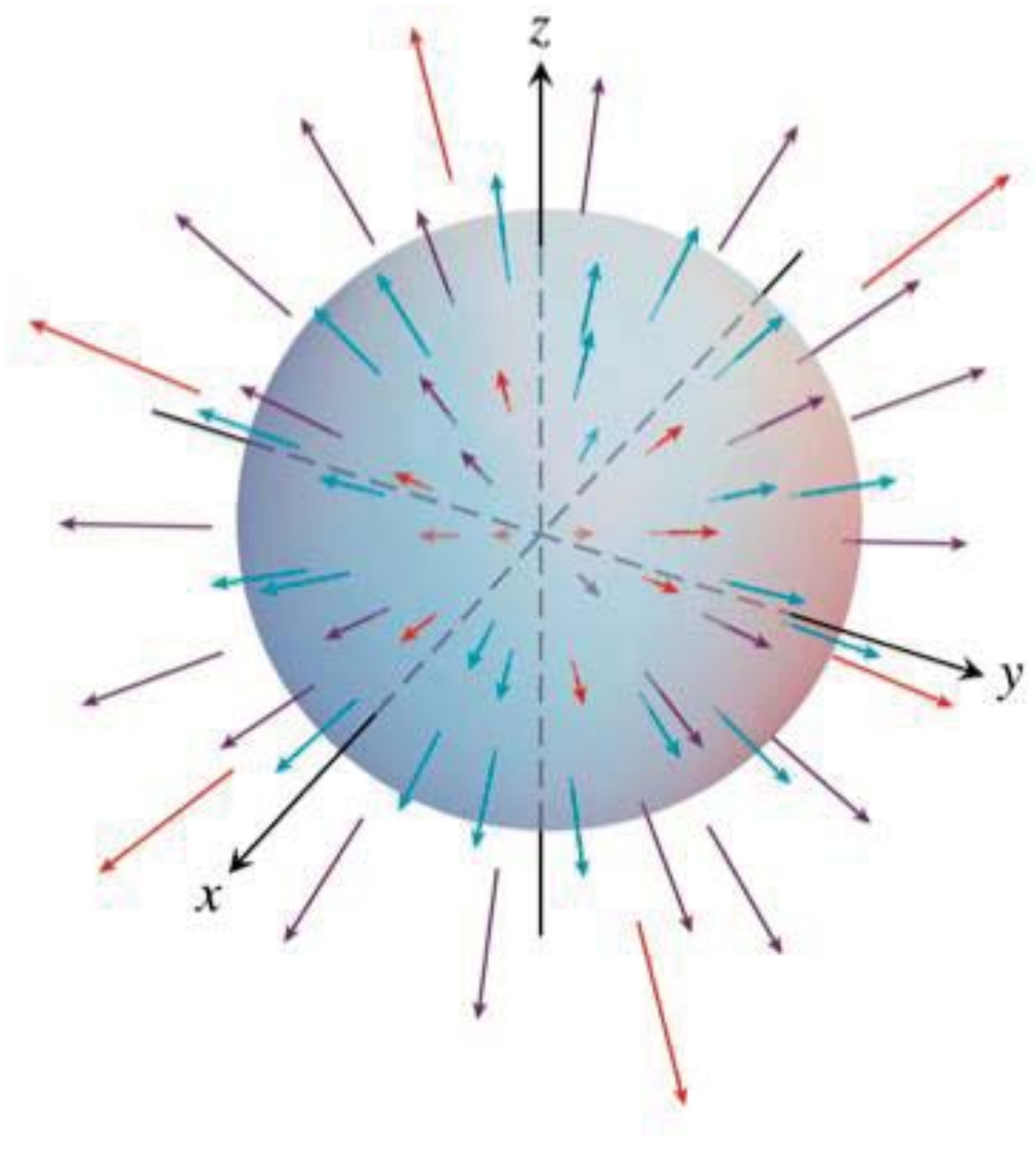
$$\vec{F} = (M, N, P)$$

میدانی تعریف شده در ناحیه ای از فضا در بر گیرنده سطح S باشد. عبارت

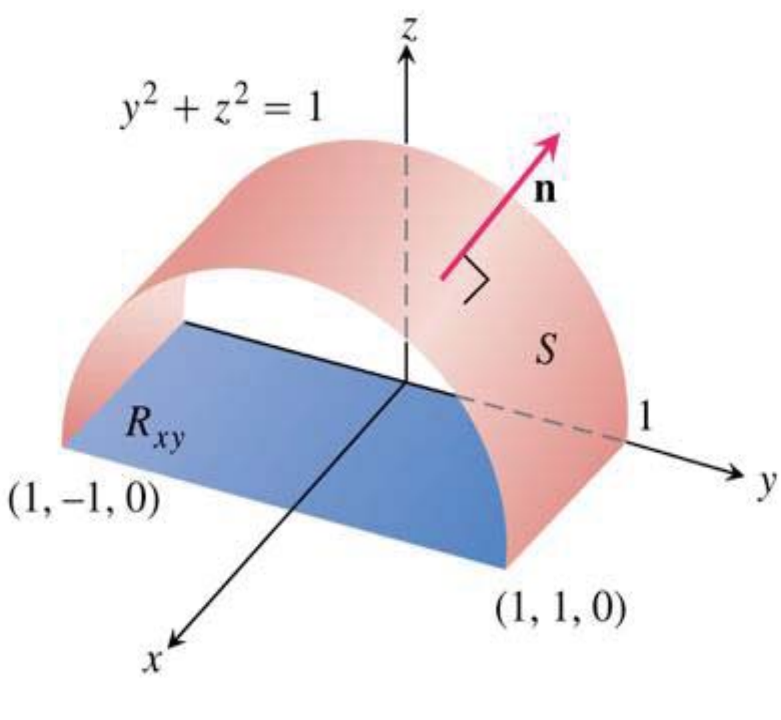
$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma$$

را شار میدان $\vec{F}$ عبور کننده از سطح S در جهت بردار $\vec{n}$ نامیم.




z
y
x

مثال: شار میدان $F = yzi + z^2k$ گذرنده از سطح S را به دست آورید که در آن S قسمتی از استوانه $y^2 + x^2 = 1$ بالای صفحه xy بین صفحات $x = 0$ و $x = 1$ می باشد.



مثال: شار میدان $F(x,y,z)=(x,y,z)$ گذرنده از سطح S را به دست آورید که در آن S سطح بسته متشکل از سهمیگون $z=x^2+y^2$ و صفحه $z=2$ است و $\vec{n}$ همه جا رو به بالاست.

مثال:

شار میدان $F(x,y,z)=(x^2+y^2,0,xyz)$ گذرنده از سطح S را به دست آورید که در آن S قسمتی از استوانه $x^2+y^2=2$ بین صفحات $z=2$ و $z=3$ است و $\vec{n}$ همه جا به سمت خارج استوانه است.

تعریف دیورژانس (واگرائی) :

$\vec{F}(x, y, z) = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}$ میدان برداری مفروض

اگر تابع برداری $\vec{\mathrm{F}}$ در تمام نقاط تعریف شده مشتق پذیر باشد .

دیورژانس تابع $\vec{\mathrm{F}}$ عبارت است از :

$$div\,\vec{F} = \nabla.\vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right).F$$

$$= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

مثال :

دیورژانس $\vec{F}$ را در نقطه (1,1,1) حساب کنید :

$$\vec{F} = xyz\vec{i} + y^3 z\vec{j} + xyz^5\vec{k}$$

$$div\,\vec{F} = yz + 3y^2 z + 5xyz^4 = 1 + 3 + 5 = 9$$

قضیه واگرایی (قضیه دیورژانس)

فرض کنید S یک سطح بسته کراندار و قطعه به قطعه هموار در فضای R^3 بوده؛ $\vec{n}$ بردار قائم یکه سطح همه جا رو به سمت خارج سطح باشد. فرض کنید $\vec{F}=(P,Q,R)$ میدانی با مشتقات جزئی پیوسته تعریف شده در ناحیه ای از فضا در بر گیرنده سطح S و نقاط درونی این سطح باشد. در این صورت داریم:

$$\oiint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iiint_D\left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\right)dxdydz=\iiint_D\left(div\vec{F}\right)dxdydz$$

که در آن $D\subset R^3$ ناحیه ای محصور توسط سطح بسته S است.

مثال: مطلوب است محاسبه $\oiint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma$ در هر یک از حالات زیر:

الف) $\vec{F}(x,y,z)=(4x,-2y,1)$ و S سطح کره $x^2+y^2+z^2=1$ و $\vec{n}$ همه جا رو به سمت داخل کره است.

ب) $\vec{F}(x,y,z)=(x^2-xy, y^2-zy, z^2-xz)$ و S سطح بسته متشکل از استوانه $x^2+z^2=1$ و صفحات $y=0$ و $y=1$ است و $\vec{n}$ همه جا رو به سمت خارج استوانه.

تذکر: در حل برخی از مسائل انتگرال سطح روی سطح بسته، استفاده از قضیه دیورژانس مجاز نمی باشد.

مثال: هرگاه $\vec{F}(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}(z,x,y)$ باشد، S سطح کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ و $\vec{n}$ همه جا رو به سمت خارج کره باشد، مطلوب است

$$\oiint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma$$

تذکر: در برخی مسائل انتگرال سطح روی سطوح غیر بسته، می توان با بستن سطح از قضیه دیورژانس استفاده نمود.

مثال: فرض کنید S قسمتی از سطح $z=1-x^2-y^2$ بالای صفحه xy و $\vec{n}$ همه جا رو به بالای سطح باشد. برای میدان

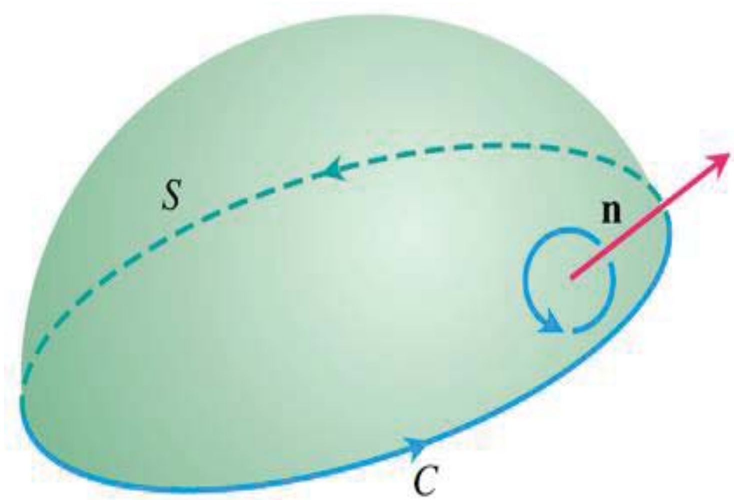
$$\vec{F}(x,y,z)=(y^3,\frac{x}{1+z^2}+y,x+y+z)$$

مطلوب است محاسبه $\oiint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma$.

قضیه استوکس

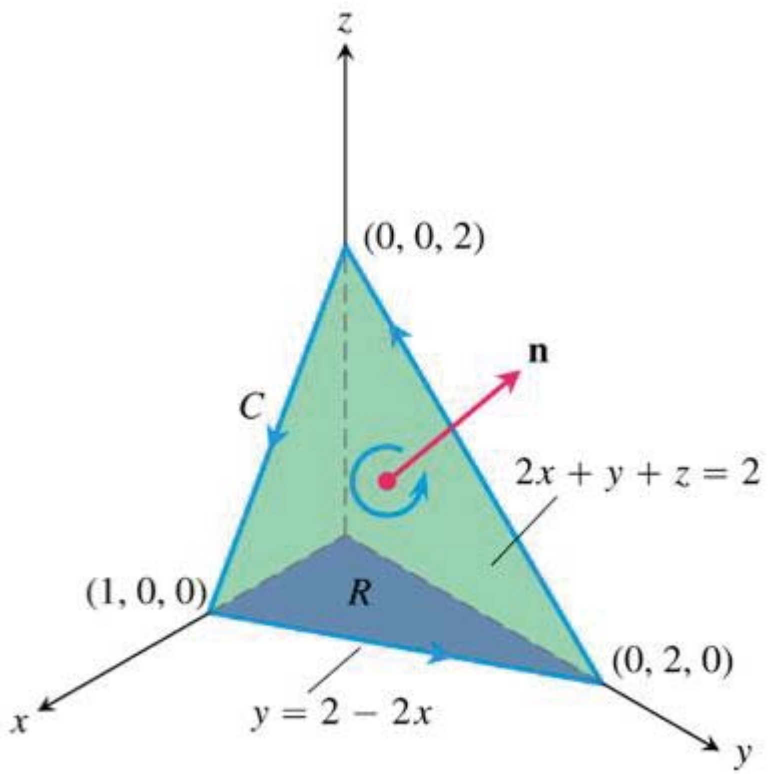
فرض کنیم S سطحی کراندار، جهت پذیر و قطعه به قطعه هموار باشد. همچنین فرض کنید C ، منحنی مرزی S ، منحنی پاده ای هموار منظم بوده و جهت حرکت بر روی C با توجه به بردار قائم یکه بر سطح S در خلاف جهت عقربه های ساعت (قانون دست راست) تعیین شده باشد. اگر $\vec{F} = (P, Q, R)$ میدانی با مشتقات جزئی پیوسته تعریف شده در ناحیه ای از فضا در بر گیرنده سطح S و منحنی C باشد، آنگاه

$$\oint_C \vec{F}.d\vec{r} = \iint_S \left(curl\vec{F}\right).\vec{n}\,d\sigma$$



مثال: مطلوب است محاسبه $\oint_C (x^2+y^2)dx+(y^2+z)dy+(z^2+x)dz$

که در آن C منحنی بسته حاصل از تلاقی صفحه $2x+y+z=2$ با صفحات مختصات و جهت حرکت بر روی آن با توجه به بردار (2,1,1) در خلاف جهت عقربه های ساعت است.



مثال: مطلوب است $\oint_C (x^2 - y)dx + 4zdy + x^2 dz$ که در آن C فصل مشترک صفحه $z = 2$ و مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ است که جهتش پادساعتگرد می باشد.