

امتحان میان ترم ریاضی مهندسی (ترم دوم ۷۸-۷۷)

موفق باشید

مدت دو ساعت

سوال یک. معادله‌ی زیر با شرایط داده شده را حل کنید

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$$

$$u(r, 0) = u(r, \pi) = 0, \quad 1 \leq r \leq b$$

$$u(1, \theta) = 0, \quad u(b, \theta) = 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

سوال دو. جواب معادله زیر با شرایط مرزی داده شده را حل کنید

$$u_t = c^2 u_{xx} + h(x, t)$$

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

سوال سه. به کمک انتگرال فوریه‌ی تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

مقدار انتگرال ناسره‌ی زیر را محاسبه کنید

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} dx$$

امتحان میان ترم ریاضی مهندسی (ترم دوم ۷۸-۷۷)

موفق باشید

(هر سوال ۲۵ نمره دارد)

مدت دو ساعت

سوال یک. (الف) سری فوریه مثلثاتی تابع زیر را بیابید

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \leq -\frac{\pi}{4} \\ -\frac{\pi}{4} & -\frac{\pi}{4} < x \leq 0 \\ 0 & 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{4} < x \leq \pi \end{cases}$$

(ب) با استفاده از (الف) مقدار سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ را محاسبه کنید.

سوال دو. جواب مساله‌ی زیر را بیابید.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, \quad y > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq a$$

$$u(0, y) = 0$$

$$u(a, y) = \begin{cases} 1 - y & 0 < y < 1 \\ 0 & y \geq 1 \end{cases}$$

سوال سه.

جواب معادله‌ی لاپلاس زیر با شرایط مرزی داده شده را بیابید.

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{4}, \quad r > 1$$

$$u_{\theta}(r, 0) = 0, \quad r \geq 1$$

$$u_{\theta}(r, \frac{\pi}{4}) = 0, \quad r \geq 1$$

$$u(1, \theta) = f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

u کراندار

سوال چهار. معادله‌ی زیر با شرایط داده شده را حل کنید

$$u_{tt} = 4u_{xx} + xt, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$u(x, 0) = x, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

امتحان میان ترم ریاضی مهندسی (ترم دوم ۸۱-۸۰)

موفق باشید

(هر سوال ۲۵ نمره دارد)

مدت دو ساعت

سوال یک. بسط فوریهی کسینوسی تابع $f(x) = x$ ، $0 < x < \pi$ را بیابید و با استفاده از آن سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ را محاسبه کنید.

سوال دو. با استفاده از انتگرال فوریهی مناسب نشان دهید:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha + \alpha \sin \alpha - 1}{\alpha^2} \cos \alpha x \, d\alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{2} x & 0 \leq x < 1 \\ \frac{\pi}{2} & x = 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

سوال سه. جواب معادلهی موج زیر با شرایط مرزی داده شده را بیابید.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq \pi$$

سوال چهار. معادلهی لاپلاس زیر با شرایط مرزی داده شده را حل کنید.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < y < b$$

$$u(x, 0) = 0$$

$$u(x, b) = f(x)$$

امتحان میان ترم ریاضی مهندسی (ترم دوم ۷۸-۷۹)

موفق باشید

مدت دو ساعت

سوال یک. (الف) بسط فوریه $f(x) = \sinh x$ را در $(-\pi, \pi)$ بیابید.

(ب) مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+n^2)^2}$ را بیابید.

(۲۵ نمره)

سوال دو. ثابت کنید

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha + \alpha \sin \alpha - 1}{\alpha^2} \cos \alpha x \, d\alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{2} x & 0 \leq x < 1 \\ \frac{\pi}{2} & x = 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

(۲۵ نمره)

سوال سه. مساله با شرایط مرزی زیر را حل کنید

$$u_{xx} + u_{yy} = F(x) + G(y) \quad , \quad 0 < x < a \quad , \quad 0 < y < b$$

$$u(x, 0) = f_1(x) \quad , \quad u(x, b) = f_2(x) \quad , \quad 0 < x < a$$

$$u(0, y) = g_1(y) \quad , \quad u(a, y) = g_2(y) \quad , \quad 0 < y < b$$

(۲۵ نمره)

سوال چهار. مساله زیر را حل کنید

$$u_{tt} = u_{xx} \quad 0 < x < L \quad , \quad t > 0$$

$$u_x(0, t) = 0 \quad , \quad u_x(L, t) = 0$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad , \quad u_t(x, 0) = g(x)$$

(۲۵ نمره)

امتحان میان ترم ریاضی مهندسی (ترم دوم ۷۷-۷۸)

موفق باشید

مدت دو ساعت

سوال یک. معادله با مشتق جزئی $xu_x + yu_y = u$ را با تبدیل $r = y/x$ و $s = y$ حل کنید.
(۱۵ نمره)

سوال دو. تابع $f(x) = \sin x$ مفروض است. (الف) بسط فوریه (نیم دامنه) سینوسی f را در $(0, \pi)$ بیابید.

(ب) بسط فوریه مثلثاتی f را در $(0, \pi)$ بیابید.
(ج) با استفاده از (ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ را محاسبه کنید.
(۲۰ نمره)

سوال سه. مساله با شرایط مرزی زیر را حل کنید

$$u_{xx} + u_{yy} = \sin x + \cos y, \quad -\pi < x < \pi, \quad -\pi < y < \pi$$

$$u(x, -\pi) = -\cos x, \quad u(x, \pi) = -\sin x, \quad -\pi < x < \pi$$

$$u(-\pi, y) = -1, \quad u(\pi, y) = 1, \quad -\pi < y < \pi$$

(۲۵ نمره)

سوال چهار. با استفاده از تبدیل فوریه معادله‌ی زیر را حل کنید.
(۲۰ نمره)

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

$$u(x, t) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0$$

امتحان میان ترم ریاضی مهندسی (ترم اول ۸۱-۸۰)

موفق باشید

مدت دو ساعت

سوال یک. (الف) سری فوریه
(۱۷ نمره)

$$f(x) = \begin{cases} x & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

را بیابید و همگرایی آنرا مشخص کنید.
(ب) با استفاده از (الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ را بیابید.
(۳۰ نمره)

سوال دو. (الف) فرمول تبدیل فوریه $f(x)$ را بنویسید و تبدیل فوریه $e^{-a|x|}$ را بیابید. a عدد مثبت ثابت.

(۱۳ نمره)
(ب) با استفاده از (الف) تبدیل فوریه $x^2 e^{-a|x|}$ را بیابید.
(۷ نمره)

سوال سه. معادله گرماي زیر را حل کنید. (با ارائه کلیه جزئیات)
(۳۰ نمره)

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} - x, & 0 < x < \ell \\ u(0, t) &= u(\ell, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) &= \sin x + \frac{1}{6a^2} x^3 + \frac{1}{6a^2} \ell^2 x - 2, & 0 < x < \ell \end{aligned}$$

سوال چهار. مطلوبست حل معادله موج نیمه متناهی
(۳۰ نمره)

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} & x > 0, t > 0 \\ u_x(0, t) &= 0 & t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x) & x > 0 \\ u_t(x, 0) &= g(x) & x > 0 \end{aligned}$$

که در آن

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ 0 & x \geq \pi \end{cases}$$

امتحان میان ترم ریاضی مهندسی

موفق باشید

۸۱/۸/۲۷

وقت: دو ساعت

سوال یک. الف) سری فوریه‌ی تابع $F(x) = |\sin x|$ را بدست آورید.
 ب) با استفاده از قسمت الف) مقدار سری عددی زیر را بیابید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - 4n^2)^2}$$

سوال دو. مطلوبست حل معادله‌ی گرمای زیر:

$$u_t = 4u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 - |x| & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

u کراندار وقتی $x \rightarrow \pm\infty$.

سوال سه. معادله‌ی لاپلاس زیر را در مختصات قطبی حل کنید

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

$$u(r, 0) = 0 \quad 0 < \theta < \pi$$

$$u(r, \pi) = 0 \quad 0 < r < 1$$

$$u(1, \theta) = F(\theta)$$

u کراندار وقتی $r \rightarrow 0^+$

سوال چهار. مطلوبست حل معادله‌ی زیر:

$$u_{tt} - u_{xx} + 1 = 0$$

$$u(0, t) = 0$$

$$u_x(\pi, t) = -\pi$$

$$u(x, 0) = \frac{x^2}{4}$$

$$u_t(x, 0) = 0$$

امتحان میان ترم ریاضی مهندسی

موفق باشید

۸۲/۹/۶

وقت: ۱۰۰ دقیقه

سوال یک. (الف) سری فوریه تابع زیر را بدست آورید. (۱۰ نمره)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \leq 0 \\ \frac{x}{2} & 0 < x < \pi \end{cases}$$

(ب) با استفاده از (الف) مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ را محاسبه کنید.

سوال دو. معادله‌ی زیر را حل کنید. (۱۲ نمره)

$$u_{xx} - u_{tt} = \sin x \quad 0 < x < \pi, t > 0$$

$$u(x, 0) = 1, \quad u_t(x, 0) = 0 \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$u(0, t) = 1, \quad u(\pi, t) = 1 \quad t > 0$$

سوال سه. معادله‌ی حرارت زیر را حل کنید. (۱۸ نمره)

$$u_t - u_{xx} = x \cos t \quad 0 < x < \pi, t > 0$$

$$u(x, 0) = \sin x$$

$$u(0, t) = t^2$$

$$u(\pi, t) = 2t$$

امتحان میان ترم ریاضی مهندسی

موفق باشید

۱۳۸۳/۲/۶

مدت امتحان ۲ ساعت

۱. تابع $f(x) = x^2$ را در فاصله $(-\pi, \pi)$ در نظر بگیرید: (۱۵ نمره)
 الف) بسط فوریه ی مثلثاتی f را بدست آورید.
 ب) جمع سری نامتناهی زیر را بیابید.

$$S = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \dots$$

۲. جواب معادله ی لاپلاس $u_{xx} + u_{yy} = 0$ در مستطیل $0 \leq x \leq a$ ، $0 \leq y \leq b$ را شرایط مرزی زیر بدست آورید. (۲۰ نمره)

$$u_x(0, y) = 0, \quad u_x(a, y) = f(y), \quad 0 \leq y \leq b$$

$$u_y(x, 0) = 0, \quad u_y(x, b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a$$

۳. تابع کراندار $u(x, t)$ با شرط $\lim_{x \rightarrow \infty} u_x(x, t) = \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$ را چنان بیابید که در معادله ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر با شرایط مرزی داده شده صدق کند. (۲۰ نمره)

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

۴. مساله با مقدار مرزی زیر را ابتدا به یک مساله ی همگن تبدیل کنید و سپس با حل مسئله ی همگن جواب $u = u(x, t)$ را بیابید. (۲۵ نمره)

$$u_{tt} = u_{xx} + \sinh x, \quad t > 0, \quad 0 \leq x \leq 3$$

$$u(0, t) = u(3, t) = 0, \quad u(x, 0) = u_t(x, 0) = \left(\frac{\sinh 3}{3} \right) x$$

امتحان میان ترم ریاضی مهندسی

موفق باشید

آذرماه ۸۴

وقت: ۱۲۰ دقیقه

۱- تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ و برای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $f(x+2) = f(x)$ مفروض است. سری فوریه‌ی این تابع را بدست آورید. (۲۵ نمره)

۲- معادله دیفرانسیل جزیی زیر مفروض است:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \quad 0 < x < 1, t > 0 \quad (1)$$

الف) با فرض اینکه $u(x, t) = e^{\alpha t} w(x, t)$ ، با تعیین مناسب α مناسب، معادله‌ی فوق را تبدیل به یک معادله‌ی حرارت بر حسب w نمایید.

ب) مطلوبست تعیین جوابی از معادله‌ی (۱) صادق در شرایط مرزی-اولیه‌ی زیر

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, & \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0 \quad t > 0 \\ u(x, 0) = x^2, & -0 < x < 1 \end{cases}$$

(۲۵ نمره)

۳- معادله‌ی $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ برای $x > 0, t > 0$ مفروض است. مطلوبست تعیین جوابی از معادله‌ی فوق صادق در شرایط اولیه‌ی $u(x, 0) = x$ ، $\frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = 1$ و شرط مرزی $u(0, t) = 0$ مقدار جواب را در نقطه‌ی $x = 2$ و در زمانهای $t = 1$ و $t = 3$ بدست آورید. (۲۰ نمره)

۴- مطلوبست حل معادله‌ی لاپلاس $u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$ برای $0 < r < 2$ و $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ تحت شرایط مرزی $u(r, 0) = u(r, \frac{\pi}{4}) = 0$ و $u(2, \theta) = (1 - \cos 2\theta) \sin 2\theta$. (توجه کنید که تابع جواب $u = u(r, \theta)$ تابعی کراندار است.) (۲۰ نمره)

(۱) گیریم f تابعی با ضابطه‌ی زیر باشد:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } |x| > 1 \\ 1 + ax & \text{اگر } -1 < x \leq 0 \\ 1 + bx & \text{اگر } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

(الف) - بسط انتگرال فوریه f را به دست آورید. (۱۵ نمره)

(ب) - با استفاده از (الف) نشان دهید که: (۱۰ نمره)

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$$

(۲) مسئله با مقادیر مرزی زیر را حل کنید: (۲۵ نمره)

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad 0 < x < \pi, 0 < y < 1$$

$$u(x, 0) = u_y(x, 1) = 0 \quad 0 < x < \pi$$

$$u(0, y) = 0 \quad 0 < y < 1$$

$$u(\pi, y) = 3 \cos\left(\frac{3\pi y}{2}\right) \sinh\left(\frac{3\pi^2}{2}\right) \quad 0 < y < 1$$

(۳) مسئله معادله‌ی با مشتقات جزئی

$$u_{tt} - 3u_{xx} = 3e^{-2x} \quad 0 < t, 0 < x < 1$$

همراه با شرایط

$$u(0, t) = -\frac{5}{4} \quad t > 0$$

$$u(1, t) = -\frac{1}{4}e^{-2} - 2 \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = -\frac{1}{4}e^{-2x} \quad 0 < x < 1$$

$$u_t(x, 0) = x \quad 0 < x < 1$$

مفروض است. ابتدا مسئله را به یک مسئله‌ی همگن تبدیل کرده و پس از حل مسئله‌ی همگن جواب مسئله‌ی اولیه را به طور کامل پیدا کنید. (۳۰ نمره)

(۱) به یکی از دو سوال زیر پاسخ دهید: (۳۰ نمره)
(الف) - معادله با مشتقات جزئی

$$u_{xx} = u_t + (2x - 1) \sin 2t + 2; \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0$$

با توجه به شرایط زیر را بطور کامل حل کنید:

$$\begin{cases} u(0, t) = \sin^2 t, & u(1, t) = \cos^2 t, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = x^2 + x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

(ب) - انتگرال فوریه‌ی تابع

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cos x & |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

پیدا کنید و به کمک آن نشان دهید که:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 + \cos(\pi\omega)}{1 - \omega^2} d\omega = 0, \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\frac{\pi\omega}{2})}{1 - \omega^2} d\omega = 1$$

(۲) با انتخاب $W(x, t) = e^{2t}u(x, t)$ معادله‌ی

$$u_{tt} + 4u_t + 4u = 9u_{xx}; \quad t \geq 0, \quad -\infty < x < +\infty,$$

را با توجه به شرایط

$$\begin{cases} u(x, 0) = e^x, & -\infty < x < +\infty \\ u_t(x, 0) = -4e^x, & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

به طور کامل حل کنید. (۲۰ نمره)

(۳) معادله‌ی با مشتقات جزئی

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \quad r \geq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

را با توجه به شرایط به طور کامل حل کنید:

$$u(1, \theta) = \begin{cases} \alpha & 0 < \theta < \pi \\ 0 & \pi \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$

که در آن α یک عدد ثابت ناصفر است، تابع u بر حسب θ متناوب و با تناوب 2π است، و u تابعی کراندار است. (۲۰ نمره)

امتحان میان ترم ریاضی مهندسی

موفق باشید

یکشنبه ۲۸ فروردین ۱۳۸۹

وقت: ۱۰۰ دقیقه

سوال یک. (الف) سری فوریه تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{\pi}{2} & 0 < x \leq \pi \\ \frac{3\pi}{2} - x & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

(ب) انتگرال فوریه‌ی تابع

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & |x| \leq \pi \\ 0 & |x| > \pi \end{cases}$$

را بیابید. (۴۰ نمره)

سوال دو. جواب معادله‌ی مشتقات جزئی

$$\begin{cases} u_{xx} - (t+1)u_t = 0 & 0 \leq x \leq 1, t \geq 1 \\ u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = 0 \\ u(x, 1) = x \end{cases}$$

را بیابید (از روش جداسازی متغیرها استفاده کنید). (۲۰ نمره)

سوال سه. مطلوب است حل معادله‌ی لاپلاس با شرایط داده شده‌ی زیر (۳۰ نمره)

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = -x \sin(y) + \pi \sin(y), & 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi \\ u_x(0, y) = \sin(y) \\ u(\pi, y) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u(x, \pi) = 0 \end{cases}$$

بناام خدا

امتحان ریاضی مهندسی (ترم دوم) ۸۸-۸۹

وقت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

۱. سوال ۱. الف) (ده نمره) سری فوریه کسینوسی تابع $f(x) = x^2 - \pi x$ ، $0 < x < \pi$ را بیابید و همگرایی آن را مشخص کنید.
ب) (ده نمره) با استفاده از الف) نشان دهید

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

ج) (ده نمره) مقادیر و توابع ویژه مساله‌ی زیر را بیابید

$$\begin{cases} X'' + \sigma X = 0, & 0 < x < L \\ X'(0) = 0 \\ X'(L) = 0 \end{cases}$$

د) (ده نمره) مساله‌ی مقدار مرزی زیر را حل کنید (تابع $f(x)$ همان تابع قسمت الف) است).

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u_x(0, t) = 0 \\ u_x(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

۲. سوال ۲. الف) (ده نمره) انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} x & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$ را بیابید و همگرایی آن را مشخص کنید.
ب) (پنج نمره) با استفاده از الف) نشان دهید

$$\int_0^{+\infty} \frac{2 \sin^2 \alpha - \alpha \sin 2\alpha}{\alpha^2} d\alpha = \frac{\pi}{2}$$

ج) (پنج نمره) جواب‌های غیر بدیهی از مساله زیر را بیابید

$$\begin{cases} X'' + \sigma X = 0, & -\infty < x < +\infty \\ X(x) \text{ کراندار وقتی که } x \rightarrow \pm\infty \end{cases}$$

د) (ده نمره) جواب معادله لاپلاس با شرایط داده شده را بیابید (تابع $f(x)$ همان تابع قسمت الف) است).

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & -\infty < x < +\infty, 0 < y < \pi \\ u(x, y) \text{ کراندار وقتی که } x \rightarrow \pm\infty \\ u(x, 0) = 0 \\ u(x, \pi) = f(x) \end{cases}$$

۳. سوال ۳. سی نمره) معادله موج با شرایط داده شده زیر را حل کنید

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + t(x^2 - \pi x) - 2a^2(t-1), & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u_x(0, t) = 2\pi \\ u_x(\pi, t) = 2\pi t \\ u(x, 0) = -x^2 + 2\pi x \\ u_t(x, 0) = x^2 \end{cases}$$

راهنمایی: ۱ - می‌توانید از مساله‌ی ۱ الف) و ۱ ج) استفاده کنید.

۲ - جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' + a^2 y = cx$ ، عبارت است از

$$y(x) = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax + \frac{c}{a^2} x.$$

سوال یک. (۲۰ نمره) به کمک سری فوریه‌ی مثلثاتی تابع

$$f(x) = \pi - |x|, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

سری زیر را محاسبه کنید.

$$\frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots$$

سوال دو. (۲۰ نمره) معادله‌ی گرمای نیمه‌متناهی زیر را حل کنید

$$u_t = 4u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0$$

$$u(x, t) \text{ کراندار وقتی } x \rightarrow +\infty$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 2 & 0 < x < 3 \\ 0 & x \geq 3 \end{cases}$$

سوال سه. (۲۰ نمره) معادله‌ی لاپلاس زیر را حل کنید

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \quad 0 < r < 1, \quad 0 < \theta < \pi$$

$$u_\theta(r, 0) = 0$$

$$u(r, \pi) = 0$$

$$u(1, \theta) = \pi - \theta$$

سوال چهار. (۲۰ نمره) مساله‌ی زیر را به یک مساله‌ی همگن با شرایط مرزی همگن تبدیل کنید (حل مساله لازم نیست).

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + e^{-x}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = t$$

$$u(\pi, t) = 0$$

$$u(x, 0) = f(x)$$

$$u_t(x, 0) = g(x)$$

سوال پنج. (۲۰ نمره) با استفاده از روش دالامبر معادله‌ی موج نیمه‌متناهی زیر را حل کنید

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0$$

$$u_x(0, t) = 4e^t$$

$$u(x, 0) = e^{-x}$$

$$u_t(x, 0) = 1$$

بنام خدا

مسائل انتخابی از چند امتحان ریاضی مهندسی در سالهای اخیر

(۱) اگر $I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$ و اگر مقدار I را به کمک سری فوریه‌ی تابع $f(x) = |\sin x|$ روی $[-\pi, \pi]$ پیدا کنیم، آنگاه I برابر با چیست؟ چرا؟ (۸ نمره)

(۲) فرض کنید $u(x, t)$ جواب مسئله‌ی
$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt} & -\infty < x < +\infty, t \geq 0 \\ u(x, 0) = x & -\infty < x < +\infty \\ u_t(x, 0) = x & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$
 باشد و $I = u(1, 1)$. در این صورت I برابر با چیست؟ چرا؟ (۸ نمره)

(۳) فرض کنید $F(\lambda) = 0$ معادله‌ای باشد که ریشه‌های آن مقادیر ویژه از مسئله‌ی اشتورم - لیوویل

$$\begin{cases} \phi''(x) + \lambda\phi(x) = 0 & 0 < x < 1 \\ \phi'(0) = 0 \\ \phi(1) + \phi'(1) = 0 \end{cases}$$

می‌باشد. در این صورت $F(\lambda)$ برابر با چیست؟ چرا؟ (۸ نمره)

(۴) به ازای چه تابع $G(x)$ تغییر متغیر $u(x, t) = w(x, t) + G(x)$ مسأله‌ی

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t + x & 0 < x < 2, t > 0 \\ u(0, t) = u(2, t) = 1 & t > 0 \\ u(x, 0) = e^x & 0 < x < 2 \end{cases}$$

را به مسأله‌ای همگن با شرایط مرزی همگن برحسب w تبدیل می‌کند؟ (۸ نمره)

(۵) اگر $\frac{a_0}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{3}$ سری فوریه‌ی کسینوسی تابع هموار $f(x)$ روی $[0, 3]$ باشد آنگاه

مقدار $I = \int_0^3 (f(x))^2 dx$ بر حسب ضرایب فوریه کسینوسی تابع f چیست؟ (۸ نمره)

(۶) اگر $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 + 1} dx$ ، آنگاه به کمک روش‌های تبدیل فوریه I را محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

(۷) مسئله‌ی با مقادیر مرزی زیر مفروض است:

$$P.D.E. \quad u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0 \quad 0 < \theta < \pi, r > 2$$

$$B.C. \quad \begin{cases} u_{\theta}(r, 0) = u_{\theta}(r, \pi) = 0 & r \geq 2 \\ u(2, \theta) = 1 + \cos 2\theta & 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

با استدلال کامل جواب این مسئله را پیدا کنید. (۲۰ نمره)

۸) مسئله‌ی غیر همگن زیر مفروض است:

$$\begin{aligned}
 P.D.E \quad & u_{tt} = 4u_{xx} - 4xe^{-t} + \sin t \quad 0 < x < 4, \quad t > 0 \\
 B.C. \quad & \begin{cases} u_x(0, t) = -4e^{-t} \\ u(4, t) = -16e^{-t} - \sin t \end{cases} \quad t \geq 0 \\
 I.C. \quad & \begin{cases} u(x, 0) = \cos\left(\frac{\pi}{\lambda}x\right) - 4x \\ u_t(x, 0) = 4x - 1 \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 4
 \end{aligned}$$

- (الف) نشان دهید که اگر u یک جواب برای این مسئله باشد، آنگاه تابع دو متغیره‌ی w با تعریف $w(x, t) = u(x, t) + 4xe^{-t} + \sin t$ در معادله‌ی همگن $4w_{xx} = w_{tt}$ صدق می‌کند. (۳ نمره)
- (ب) به کمک تغییر متغیر قسمت (الف)، مسئله‌ی غیر همگن فوق را به یک مسئله‌ی همگن بر حسب w تبدیل و مسئله‌ی حاصل را بازنویسی کنید. (۲ نمره)
- (ج) مسئله‌ی همگن بدست آمده در قسمت (ب) را به کمک روش جداسازی متغیرها و استفاده از سری های فوریه حل کنید و جواب مسئله‌ی همگن را در پیدا کنید. (۱۴ نمره)
- (د) جواب مسئله‌ی غیر همگن را به کمک جواب بدست آمده در قسمت (ج) و تغییر متغیر قسمت (الف) پیدا کنید. (۱ نمره)

- ۹) (الف) تابع f با تعریف $f(x) = e^{-x}$ روی $[0, +\infty)$ مفروض است. اگر $A(\lambda)$ ضریب انتگرال فوریه کسینوسی (تبدیل فوریه کسینوسی) f باشد آنگاه، به کمک تعریف انتگرالهای ناسره، $A(\lambda)$ را به طور کامل محاسبه کرده و نتیجه را در مستطیل زیر بنویسید. (۸ نمره)
- (ب) به کمک انتگرالهای فوریه و با استفاده از جواب بدست آمده در قسمت (الف) جواب مسئله‌ی حرارت

$$P.D.E. \quad 9u_{xx} = u_t \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0$$

$$I.C. \quad u(x, 0) = e^{-x} \quad 0 \leq x < +\infty$$

- را با جزئیات کامل محاسبه نموده و نتیجه را به صورت یک انتگرال فوریه در مستطیل زیر بنویسید (نیازی به ساده کردن انتگرال حاصل نیست). (۱۲ نمره)

موفق باشید

نام و نام خانوادگی: شماره دانشجویی: نام مدرس:

پاسخ صحیح سئوالات را در جدول زیر با علامت × مشخص نمایید.

۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	
										الف
										ب
										ج
										د

(۱) تابع ψ را چگونه در نظر بگیریم تا با قرار دادن $u(x, t) = w(x, t) + \psi(x)$ در معادله $u_t = 4u_{xx} + \sin x$ همراه با شرایط $u(x, 0) = f(x)$ و $u(0, t) = 1$ ، $u_x(0, t) = -1$ تبدیل شود. شرایط همگن و همگن و شرایط همگن

الف) $\psi(x) = \frac{1}{4} \sin x - \frac{5}{4}x + 1$ ب) $\psi(x) = -\frac{1}{4} \cos x - \frac{3}{4}x + 1$

ج) $\psi(x) = -\frac{1}{4} \sin x - \frac{3}{4}x + 1$ د) $\psi(x) = \frac{1}{4} \cos x - \frac{5}{4}x + 1$

(۲) برای معادله‌ی $u_t = c^2 u_{xx} - 5u$ با فرض $u(x, t) = w(x, t)v(t)$ ، تابع v را کدامیک از توابع زیر انتخاب کنیم تا معادله به فرم $w_t = c^2 w_{xx}$ تبدیل شود؟

الف) $v = \sin 5t$ ب) $v = \cos 5t$ ج) e^{-5t} د) e^{5t}

(۳) می دانیم که انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$ به صورت $\int_0^{+\infty} \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha x}{\pi \alpha} d\alpha$ است. در این صورت مقدار $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ برابر است با

الف) $\frac{\pi}{8}$ ب) $\frac{\pi}{4}$ ج) $\frac{\pi}{2}$ د) π

(۴) مقدار سری فوریه متناظر تابع متناوب f با تعریف

$$f(x) = \begin{cases} -3 & -2 \leq x < 0 \\ 5 & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$f(x+4) = f(x)$

در نقطه‌ی $x = 0$ برابر است با

الف) π ب) 1 ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{\pi}{2}$

۵) مقدار $u(2, 1)$ برای جواب مسئله‌ی $u_{tt} - u_{xx} = 0$ با شرایط $u_t(x, 0) = x^2$ ، $u(x, 0) = 0$ و $-\infty < x < +\infty$ و $t \geq 0$ کدام است؟

- الف) ۳ ب) $\frac{2}{3}$ ج) $\frac{1}{3}$ د) $\frac{13}{3}$

۶) ضریب a_6 برای سری فوریه کسینوسی تابع $f(x) = \frac{5}{4} + \cos^2 3x$ ، $0 < x < \pi$ ، چیست؟

- الف) $-\frac{3}{4}$ ب) $\frac{3}{4}$ ج) $\frac{1}{4}$ د) $-\frac{1}{4}$

۷) مقادیر ویژه و توابع ویژه در مسئله $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = 0, \quad y(1) = 0 \end{cases}$ عبارتند از:

- الف) $n = 1, 2, 3, \dots$ ، $y_n(x) = \cos(n-1)\pi x$ ، $\lambda_n = (n-1)^2 \pi^2$
 ب) $n = 1, 2, 3, \dots$ ، $y_n(x) = \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2} x\right)$ ، $\lambda_n = \frac{1}{4}(2n-1)^2 \pi^2$
 ج) $n = 1, 2, 3, \dots$ ، $y_n(x) = \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2} x\right)$ ، $\lambda_n = \frac{1}{4}(2n-1)^2 \pi^2$
 د) $n = 1, 2, 3, \dots$ ، $y_n(x) = \sin(n-1)\pi x$ ، $\lambda_n = (n-1)^2 \pi^2$

۸) می دانیم که سری فوریه تابع $f(x) = x$ روی $-\pi < x < \pi$ برابر است با

$$2 \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right).$$

در این صورت $\int_0^\pi x^2 dx$ برابر است با

- الف) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\pi}{n^2}$ ب) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{n^3}$ ج) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \pi}{n^3}$ د) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2\pi}{n^2}$

۹) تبدیل فوریه کسینوسی تابع $f(x) = e^{-3x}$ کدام است؟

- الف) $\frac{3}{9 + \lambda^2}$ ب) $\frac{1}{9 + \lambda^2}$ ج) $\frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{9 + \lambda^2}$ د) $\sqrt{\frac{6}{\pi}} \frac{1}{9 + \lambda^2}$

۱۰) برای مسئله‌ی اشتورم-لیوویل

$$\begin{cases} x^2 y'' + 5xy' + \lambda y = 0 & 1 < x < e \\ y(1) = y(e) = 0 \end{cases}$$

کدام گزینه در مورد توابع ویژه‌ی حاصل از این مسئله درست است؟

- الف) $\int_1^e x \phi_n(x) \phi_m(x) dx = 0$ ، $n \neq m$ ب) $\int_1^e x^2 \phi_n(x) \phi_m(x) dx = 0$ ، $n \neq m$
 ج) $\int_1^e x^3 \phi_n(x) \phi_m(x) dx = 0$ ، $n \neq m$ د) $\int_1^e \phi_n(x) \phi_m(x) dx = 0$ ، $n \neq m$

موفق باشید

بنام خدا
امتحان درس ریاضی مهندسی (تابستان ۹۰، PDE)

۱. با تغییر متغیر $u(x, t) = e^{\delta t} w(x, t)$ و انتخاب یک δ مناسب می توان تابع u را در معادلات رسانش گرما (در صورت وجود) حذف کرد. از این تغییر متغیر برای پیدا کردن جواب مسأله‌ی زیر استفاده کنید.

$$\begin{array}{lll} P.D.E. & u_{xx} = u_t + 4u & 0 \leq x \leq 2, t \geq 0 \\ B.C. & u_x(0, t) = u_x(2, t) = 0 & t > 0, \\ I.C. & u(x, 0) = x & 0 < x < 2, \end{array}$$

۲. مسأله‌ی با مقادیر مرزی زیر

$$\begin{array}{lll} P.D.E. & r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0 & 0 < r \leq a, 0 \leq \theta \leq \pi \\ B.C. & u(r, 0) = u(r, \pi) = 0 & 0 < r < a \\ I.C. & u(a, \theta) = f(\theta) & 0 < \theta < \pi \end{array}$$

را، که در آن f یک تابع قطعه‌ای پیوسته روی $[0, \pi]$ است و u روی دامنه‌ی تعریف خود کراندار است، حل کنید.

۳. اگر $a > 0$ ، آنگاه تبدیل فوریه تابع f با تعریف

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } |x| < a \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

را در صورت وجود پیدا کنید. $\mathcal{F}(0)$ برابر چیست؟ تابع f را بر حسب تبدیل فوریه معکوس بیان کنید.

موفق باشید

(۱) مطلوب است حل مسئله زیر:

$$\begin{aligned}u_{xx} - u_t &= \sqrt{x} - \sinh \sqrt{t} & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\u(0, t) &= \cosh \sqrt{t} & t \geq 0 \\u(1, t) &= \sinh \sqrt{t} & t \geq 0 \\u(x, 0) &= x^3 + 2 & 0 < x < 1\end{aligned}$$

(۲) جواب $u(x, t)$ از مسئله‌ی زیر را پیدا کنید:

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} + e^{-t} \sin 3\pi x & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\u(0, t) &= 0 & t \geq 0 \\u(1, t) &= 0 & t \geq 0 \\u(x, 0) &= \sin \pi x & 0 < x < 1\end{aligned}$$

موفق باشید

بنام خدا

آزمون میان ترم درس ریاضی مهندسی

(۱) الف) می دانیم که ضرائب سری فوریه‌ی تابع $f(x) = \begin{cases} -\pi & -\pi < x < 0 \\ x & 0 < x < \pi \end{cases}$ برای $n \geq 1$ عبارتند از $a_n = \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi}$ و $b_n = \frac{1 - 2(-1)^n}{n}$. با استفاده از این ضرائب و محاسبه‌ی a_0 ، ابتدا سری فوریه‌ی f را نوشته، سپس به کمک آن مقدار سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ را محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

(ب) می دانیم که ضریب سری سینوسی تابع $f(x) = \pi^2 x - x^3$ در بازه‌ی $(0, \pi)$ برای هر $n \geq 1$ برابر است با $b_n = \frac{12(-1)^{n+1}}{n^3}$. با استفاده از این واقعیت مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$ را محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

(۲) الف) به کمک انتگرال فوریه جواب مسأله‌ی رسانش گرمای زیر را به دست آورده و آن را به صورت یک انتگرال بیان کنید:

$$P.D.E : u_t = u_{xx}, \quad 0 \leq x < \infty, \quad t \geq 0$$

$$B.C. : u_x(0, t) = 0, \quad t > 0$$

$$I.C. : u(x, 0) = f(x), \quad x > 0$$

که در آن تابع u در دامنه‌ی مورد بحث کراندار است و f روی $(0, \infty)$ تابعی است قطعه‌ای هموار و مطلقاً انتگرال پذیر. (۱۲ نمره)

(ب) تبدیل فوریه‌ی تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$ که در آن $a > 0$ ، را محاسبه کنید. (۸ نمره)

(۳) الف) توابع ویژه و مقادیر ویژه‌ی مسأله‌ی اشتورم-لیوویل زیر را به دست آورید. (۱۰ نمره)

$$\begin{cases} \varphi''(x) + \lambda \varphi(x) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ \varphi'(0) = 0 \\ \varphi(1) + \varphi'(1) = 0 \end{cases}$$

(ب) بدون استناد به خواص یک مسأله‌ی اشتورم-لیوویل، مستقیماً ثابت کنید که توابع ویژه‌ی نظیر مقادیر ویژه‌ی متمایز در مسأله‌ی فوق در بازه‌ی $[0, 1]$ متعامدند. (۱۰ نمره)

۴) مسأله‌ی دیریشله (لاپلاس) زیر را، که روی یک ربع دایره طرح شده و در آن u تابعی کراندار است، حل کنید: (۲۰ نمره)

$$P.D.E : \quad u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \quad 0 < r < 2, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{4}$$

$$B.C. : \quad \begin{cases} u_{\theta}(r, 0) = 0, \\ u(r, \frac{\pi}{4}) = 0, \end{cases} \quad 0 \leq r \leq 2$$

$$B.C. : \quad u(2, \theta) = \theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{4}$$

۵) مسأله‌ی موج ناهمگن زیر را حل کنید: (۲۰ نمره)

$$P.D.E : \quad u_{tt} = u_{xx} + t \cos 2\pi x, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$B.C. : \quad \begin{cases} u_x(0, t) = 0, \\ u_x(1, t) = 0, \end{cases} \quad t > 0$$

$$I.C. : \quad \begin{cases} u(x, 0) = 0, \\ u_t(x, 0) = \cos \pi x, \end{cases} \quad t > 0$$

توجه: در حل این مسأله می‌توانید بدون حل مسأله‌ی اشتورم-لیوویل مشهور مربوط، از جوابهای شناخته شده‌ی آن استفاده کنید.

موفق باشید

بنام خدا

آزمون میان ترم درس ریاضی مهندسی

مدت ۳ ساعت

فروردین ۸۹

- (۱) الف) بسط فوریه کسینوسی $f(x) = x(\pi - x)$ را در بازه $[0, \pi]$ بدست آورید. (۱۰ نمره)
 ب) با استفاده از اتحاد پارسوال و قسمت الف) نشان دهید: (۱۰ نمره)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{90}.$$

- (۲) الف) روش دالامبر را برای مساله زیر با ذکر جزئیات شرح دهید: (می توانید از فرمول دالامبر برای معادله ی
 فنر دو سر نامتناهی استفاده کنید). (۱۲ نمره)

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 9u_{xx}, & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & x \geq 0, \\ u_t(x, 0) &= g(x), & x \geq 0, \\ u_x(0, t) &= 0, & t \geq 0. \end{aligned}$$

- ب) هرگاه $f(x) = \cos x$ و $g(x) = e^x$ ، آنگاه جواب قسمت الف) را به طور صریح پیدا کنید. (۵ نمره)
 ج) با استفاده از (ب) مقدار $u(2, 3)$ را پیدا کنید. (۳ نمره)

- (۳) مساله ی دیریکله ی زیر را حل کنید: (۲۰ نمره)

$$\begin{aligned} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} &= 0, & 0 < \theta < \frac{\pi}{4}, 1 < r < 2, \\ u(r, 0) &= 0, u(r, \frac{\pi}{4}) = f(r), & 1 \leq r \leq 2, \\ u(1, \theta) &= u(2, \theta) = 0, & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

- (۴) الف) مقادیر ویژه و توابع ویژه ی مساله ی اشتورم-لیوویل زیر را بدست آورید: (۱۰ نمره)

$$\begin{aligned} y'' + 4y' + (3 + \lambda)x &= 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ y(0) &= y(\pi) = 0. \end{aligned}$$

- ب) نشان دهید توابع ویژه این مساله نسبت به تابع وزنی مناسب در بازه $[0, \pi]$ متعامدند. (۱۰ نمره)

- (۵) جواب مساله ی با مقادیر اولیه مرزی زیر را بدست آورید: (۲۰ نمره)

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + e^{-2t} \sin x + 2t, & 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0, \\ u(x, 0) &= x - \frac{\pi}{4}, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) &= t^2 - \frac{\pi}{4}, u(\pi, t) = t^2 + \frac{\pi}{4}, & t \geq 0. \end{aligned}$$

(توجه: در حل این مساله می توانید از مقادیر ویژه و توابع ویژه ی مسایل حل شده در کلاس، بدون آنکه آنها را ثابت کنید، استفاده نمایید.)

موفق باشید

سوال یک. (۲۰ نمره) (الف) سری فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} 0 & -2 < x < -1 \\ k & -1 < x < 1 \\ 0 & 1 < x < 2 \end{cases}$ را بیابید (k یک عدد ثابت است).

در هر نقطه از بازه $[-2, 2]$ ، سری فوریه به دست آمده به چه مقداری همگرا است؟

(ب) با استفاده از (الف) مقدار سری‌های زیر را محاسبه کنید

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \quad \text{و} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

سوال دو. (۲۰ نمره) (الف) انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ e^{-x} & x > 0 \end{cases}$ را بیابید و همگرایی آن را مشخص کنید.

(توجه: می‌توانید در این مساله از انتگرال‌های

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} \quad \text{و} \quad \int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}(-b \cos bx + a \sin bx)}{a^2 + b^2}$$

استفاده کنید.)

(ب) با استفاده از (الف) انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x - \lambda \sin \lambda x}{1 + \lambda^2} d\lambda$$

سوال سه. (۳۰ نمره) معادله‌ی لاپلاس زیر را حل کنید

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \quad 1 < r < e, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{3}$$

$$u(1, \theta) = 0 \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$$

$$u(e, \theta) = 0 \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$$

$$u(r, 0) = 0 \quad 1 \leq r \leq e$$

$$u\left(r, \frac{\pi}{3}\right) = 1 \quad 1 \leq r \leq e$$

سوال چهار. (۳۰ نمره) مساله‌ی غیر همگن زیر را حل کنید

$$u_t = a^2 u_{xx} + t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0 \quad t \geq 0$$

$$u(\pi, t) = 0 \quad t \geq 0$$

$$u(x, 0) = 1 \quad 0 \leq x \leq \pi$$

(توجه: (۱) می‌توانید در این مساله از مقادیر و توابع ویژه مسائل حل شده در کلاس، بدون آن‌که آن‌را ثابت کنید استفاده نمایید.

(۲) اگر a یک عدد ثابت باشد، جواب معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول $y'(x) + ay(x) = q(x)$ عبارت است از

$$y(x) = e^{-ax}y(0) + \int_0^x e^{-a(x-\tau)}q(\tau) d\tau$$