

به نام خالق یکتا

تکلیف ۳

۱. مسیر تحول مربوط به خم زیر را به دست آورید:

$$\vec{r}(t) = ae^{-t} \cos t \vec{i} + ae^{-t} \sin t \vec{j}.$$

۲. (الف) برای خمی که در مختصات قطبی معادله آن به صورت $r = f(\theta)$ است ثابت کنید که مقدار انحنا در هر θ از رابطه

$$\kappa(\theta) = \frac{|2[f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2 - f(\theta)f''(\theta)|}{[f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2}$$

به دست می آید.

(ب) با استفاده از (الف)، مقدار انحنا برای خم به معادله $r = a(1 - \cos \theta)$ را برای هر $\theta \in \mathbb{R}$ محاسبه کنید و به طور مشخص مقدار انحنا را در $\theta = 0$ ، $\theta = \pi/4$ و $\theta = \pi/2$ محاسبه کنید.

۳. برای خم های زیر معادلات پارامتری بر حسب t را به معادلات پارامتری بر حسب طول قوس تبدیل کنید:

$$(i) \quad \vec{r}(t) = e^t \vec{i} + \sqrt{2}t \vec{j} - e^{-t} \vec{k}$$

$$(ii) \quad \vec{r}(t) = a \cos^3 t \vec{i} + a \sin^3 t \vec{j} + b \cos 2t \vec{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi/2$$

$$(iii) \quad \vec{r}(t) = 3t \cos t \vec{i} + 3t \sin t \vec{j} + 2\sqrt{2}t^3 \vec{k}$$

۴. خم $\vec{r}(t)$ را طوری پیدا کنید که برای آن $\tau(t) = 1$ ، $\kappa(t) = 1$ و $\vec{N}(0) = \vec{j}$ ، $\vec{r}(0) = \vec{T}(0) = \vec{i}$ ، $\vec{B}(0) = \vec{k}$.

۵. (الف) خم C که توسط تابع برداری

$$\vec{r}(t) = t \cos t \vec{i} + t \sin t \vec{j} + (\pi - t) \vec{k}$$

تعریف می شود را در نظر بگیرید. این خم را با محاسبه $\kappa(t)$ ، $\tau(t)$ ، $\vec{T}(t)$ ، $\vec{N}(t)$ و $\vec{B}(t)$ در هر $t \in \mathbb{R}$ توصیف کنید.

(ب) طول قوس این خم را در هر لحظه t محاسبه کنید.

(ج) آیا می توانید تابع مکوس تابع طول قوس به دست آمده در (الف) را به دست آورید؟